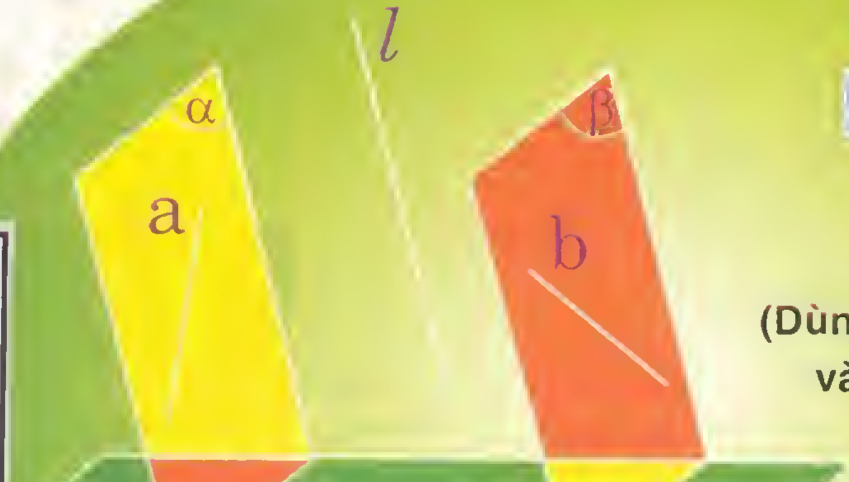
LÊ BÍCH NGỌC (chủ biên)
ThS. LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Hình học 11

(In lần thứ ba)



(Dùng cho học sinh ban A
và luyện thi Đại học)

ĐHQG Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

HỌC VÀ ÔN TẬP

TOÁN

do Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ tài liệu gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10

Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10

Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11

Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11

Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11

Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12

Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12

Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ tài liệu này là cung cấp cho các Thầy, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

HÌNH HỌC 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 5 chương:

Chương I: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

Chương II: Quan hệ song song

Chương III: Quan hệ vuông góc

Chương IV: Mặt cầu và mặt tròn xoay

Chương V: Diện tích và thể tích

Bao gồm 21 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 48 dạng toán cơ bản và nâng cao của hình học 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kkiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến xin liên hệ trực tiếp hoặc gửi về theo địa chỉ:

Nhóm tác giả Cự Môn - Nhà sách Toán phổ thông Cự Môn

Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Điện thoại: (04) 7196671

NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1

MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH PHÉP DỜI HÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. PHÉP BIẾN HÌNH

Định nghĩa 1: *Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất M' của mặt phẳng, điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.*

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là f thì:

- $M_1 = f(M)$.
- Nếu **H** là một hình nào đó thì tập hợp các điểm $M' = f(M)$, với $M \in$ **H**, tạo thành hình **H'**, ta viết **H'** = f(**H**).

Tích của hai phép biến hình: Cho hai phép biến hình trong S theo sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g_0 f"'] & & M'' \end{tikzcd}$$

Phép biến hình biến M thành M'' được là tích của hai phép biến hình f và g theo thứ tự đó, ký hiệu là $g_o f$, ta có:

$$M'' = (g_o f)(M) = g(f(M)), \forall M \in (\mathbf{H}).$$

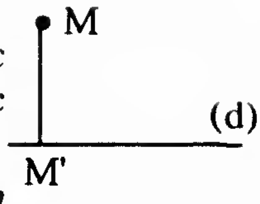
2. PHÉP DỜI HÌNH

Định nghĩa 2: *Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.*

Định lí: *Phép dời hình biến*:

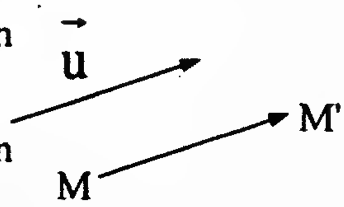
- *Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.*
- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tia thành tia.*
- *Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.*
- *Tam giác thành tam giác bằng nó.*
- *Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*
- *Góc thành góc bằng nó.*

II. CÁC VÍ DỤ MỞ ĐẦU



Ví dụ 1: Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, ta xác định M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên d thì ta được một phép biến hình.

Phép biến hình này gọi là *phép chiếu vuông góc lên đường thẳng* d.



Ví dụ 2: Cho vectơ $\vec{u}$, với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Như vậy, ta cũng có một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là *phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{u}$.

Ví dụ 3: Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng có được một phép biến hình.

Phép biến hình đó gọi là *phép đồng nhất.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Hãy vẽ ảnh của các hình sau qua phép chiếu vuông góc lên đường thẳng (d):

a. Đường tròn (O, R).
b. Đoạn thẳng AB = 2R, biết AB song song với (d).
c. Đoạn thẳng AB = 2R, biết AB vuông góc (d).
d. Đoạn thẳng AB = 2R, biết góc (AB, d) = 30^0.
e. Đoạn thẳng AB = 2R, biết góc (AB, d) = 45^0.
f. Đoạn thẳng AB = 2R, biết góc (AB, d) = 60^0.

Bài 2.

a. *Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng* d có phải là một phép dời hình khôngg ?
b. *Phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{u}$ có phải là một phép dời hình không ?
c. *Phép đồng nhất* có phải là một phép dời hình không ?

Bài 3.

a. Tích của một phép tịnh tiến và một phép đồng nhất có phải là một phhép dời hình không ?
b. Tích của một phép đồng nhất với một phép tịnh tiến có phải là một phhép dời hình không ?
c. Tích của hai phép tịnh tiến có phải là một phép dời hình không ?

Bài 4.

a. Tích của hai phép đồng nhất là một phép đồng nhất là đúng hay sai ?
b. Tích của hai phép tịnh tiến có thể là một phép đồng nhất hay không ?
c. Tích của ba phép tịnh tiến có thể là một phép đồng nhất hay không ?

CHỦ ĐỀ 2

PHÉP TỊNH TIẾN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP TỊNH TIẾN

***Định nghĩa**: Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$ là một phép dời hình biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.*

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

***Định lí 1**: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M'N' = MN.*

Ý nghĩa của định lí 1 là *"Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì"*

***Định lí 2**: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.*

***Hệ quả**: Phép tịnh tiến biến:*

- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tia thành tia.*
- *Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.*
- *Tam giác thành tam giác bằng nó.*
- *Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*
- *Góc thành góc bằng nó.*

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(a; b)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

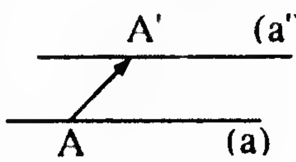
Bài toán 1: Tìm vectơ tịnh tiến $\vec{v}$ biến hình $(\mathbf{H_1})$ thành hình $(\mathbf{H_2})$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép tịnh tiến.

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả các phép tịnh tiến biến a thành a'.

Giải



Mọi phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ với $A \in a$ và $A' \in a'$ đều biến đường thẳng a thành a'.

Ví dụ 2: Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo $\vec{u}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo $\vec{v}$. Với điểm M bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến điểm M thành M'' là một phép tịnh tiến.

Giải

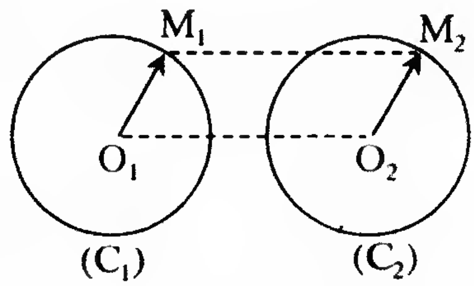
Đặt $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, ta có nhận xét:

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$$

Vậy, phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và đều có bán kính R. Tìm phép tịnh tiến biến (C_1) thành (C_2).

Giải



Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2}$$

$$\Rightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow O_1M_1 = R \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$$

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. *Với bài toán định tính*, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh. $M_2 = T_{\vec{v}}(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = T_{\vec{v}}(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép tịnh tiến để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép tịnh tiến để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được các phép tịnh tiến thích hợp, ngoài việc chứng minh được các tính chất hình học ta còn có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$MP + NQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (*)$$

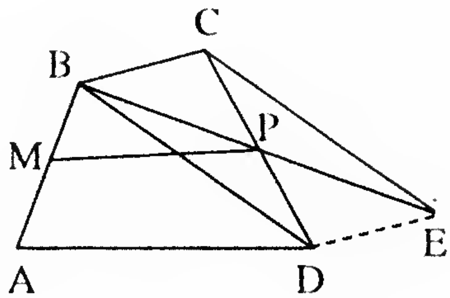
Giải

Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}: D \mapsto E$.

Khi đó tứ giác BCED là hình bình hành, vì P là trung điểm của CD nên P cũng là trung điểm của BE.

Do đó ta có:

$$MP = \frac{1}{2}AE \le \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \qquad (1)$$



Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

A, D, E thẳng hàng $\Leftrightarrow$ AD // BC.

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$NQ \le \frac{1}{2}(AB + CD). \qquad (2)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra $\Leftrightarrow$ AB // CD

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

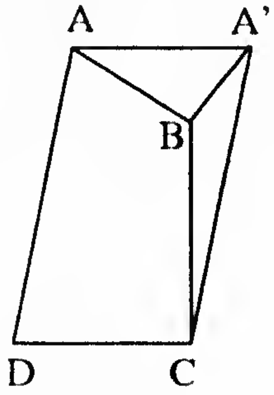
$$MP + NQ \le \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (3)$$

Vậy để có (*) thì dấu " = " xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow$ dấu " = " xảy ra tại (1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ BC // AD \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là hình bình hành.}$$

Ví dụ 2: Tứ giác ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 60^0$. Tìm số đo góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$.

Giải



Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}: A \mapsto A'$, khi đó tứ giác ADCA' là hình bình hành và $\widehat{BAA'} = 60^0$.

Trong $\Delta ABA'$, ta có:

$\widehat{BAA'} = 60^0$,

$AA' = 2AB$.

Do đó, $\Delta ABA'$ vuông tại B và $\widehat{BA'A} = 30^0$, $A'B = 3$.

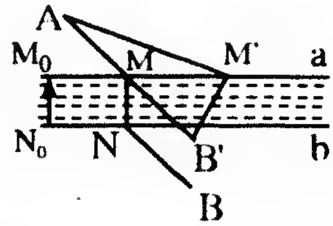
Vì $A'B = BC = 3$ nên $\Delta BCA'$ cân tại B, do đó:

$$\widehat{BCA'} = \widehat{BA'C} = \widehat{AA'C} - \widehat{BA'A} = 60^0 - 30^0 = 90^0.$$

$$\widehat{ABC} = 360^0 - (\widehat{BAD} + \widehat{CDA} + \widehat{BCD}) = 360^0 - (60^0 + 60^0 + 90^0) = 150^0.$$

Ví dụ 3: Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song).

Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông (tất nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và đắp hai đoạn thẳng từ A đến M và từ B đến N. Hãy xác định vị trí của chiếc cầu MN sao cho AM + BN ngắn nhất.



Giải

Lấy điểm $M_0 \in$ a ta có duy nhất điểm $N_0 \in$ b sao cho $M_0N_0 \perp$ a và $M_0N_0 \perp$ b.

Gọi $B' = T_{\overrightarrow{N_0M_0}}$ và $M = AB' \cap a$, khi đó với điểm M' bất kì thuộc a tương ứng với điểm N' thuộc b (sao cho $M'N' \perp a$) ta có:

Ta có:

$$M'A + N'B = M'A + M'B \geq AB' = MA + MB' = MA + NB.$$

Tức là AM + BN ngắn nhất.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, biến điểm E di động thành điểm M.

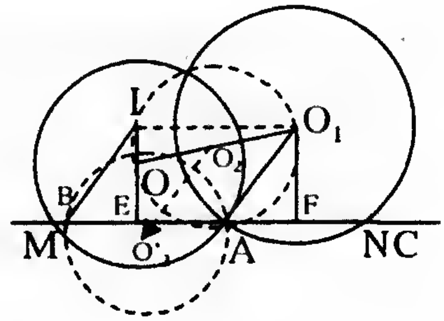
Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Vậy tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại hai điểm, gọi A là một giao điểm. Đường thẳng (d) di động qua A và cắt hai đường tròn đã cho tại M và N. Trên hai tia AM và AN lấy hai điểm B và C sao cho:

$$2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}.$$

Tìm quỹ tích các điểm B và C.



Giải

Dựng OE và O_1F vuông góc với (d).

Ta có E, F lần lượt là trung điểm các đoạn AM, AN và:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$$

Dựng O_1I vuông góc với OE, khi đó tứ giác O_1IEG là hình chữ nhật

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow O_1ABI \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O_1A} \Rightarrow B = T_{\overrightarrow{O_1A}}(I).$$

- Vì OIO_1 vuông nên tập hợp các điểm I là đường tròn (O_2) đường kính OO_1, từ đó suy ra tập hợp các điểm B là đường tròn (O'_2) với:

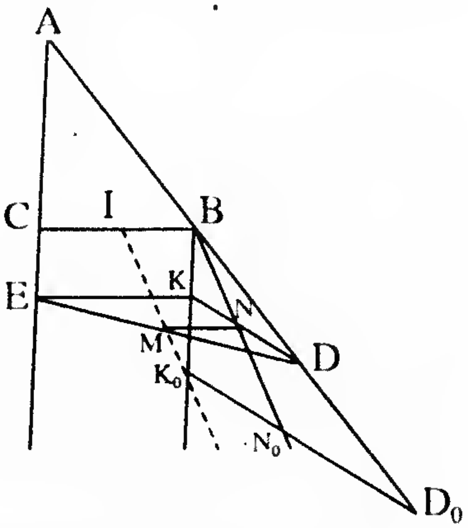
  $(O'_2) = T_{\overrightarrow{O_1A}}[(O_2)]$.

- Tương tự, ta có tập hợp điểm C là đường tròn (O'_3) với:

  $(O'_3) = T_{\overrightarrow{OA}}[(O_3)]$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC cố định, gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA, các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.

Giải



Dựng hình bình hành BCEK, ta có K ở trên tia Bz cố định song song cùng chiều với tia Cy. Trên tia Bz lấy lần lượt hai điểm cố định D_0, K_0 sao cho $BD_0 = 2BK_0$.

Vì BD = 2CE = 2BK nên BK// D_0K_0. Gọi N và N_0 lần lượt là trung điểm của BD và D_0K_0 thì N_0 cố định và quỹ tích của N là tia BN_0.

Ta có:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$$, với I là trung điểm BC.

Suy ra: $M = T_{\overrightarrow{BI}}(N)$.

Do đó quỹ tích của M là tia I_m là ảnh của tia BN_0 qua phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{BI}$.

Bài toán 4: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết hai đường chéo AC = a, BD = b, góc $\widehat{ABC} = \alpha$ và đường trung bình MN = c.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

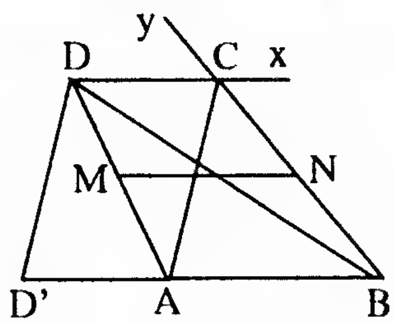
Thực hiện phép tịnh tiến

$T_{\overrightarrow{CA}} : D \mapsto D'$

khi đó tứ giác ACDD' là hình bình hành nên ta có:

$BD' = BA + AD' = AB + DC = 2MN = 2c$

$\Rightarrow \Delta BDD'$ dựng được, (biết 3 cạnh).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $\Delta BDD'$ với $BD' = 2c$, $BD = b$, $DD' = a$
- Dựng Dx // BD'
- Dựng By hợp với BD' góc α, By cắt Dx tại C.
- Dựng Cz // DD', Cz cắt BD'' tại A

Thì tứ giác ABCD là hình thang cần dựng

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

- CD // AB nên ABCD là hình thang; $BD = b$, góc $\widehat{ABC} = \alpha$
- $AC = DD' = a$ (do ACDD' là hình bình hành) và

$$MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(AB + AD') = \frac{1}{2}BD' = c$$

Biện luận: Bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi:

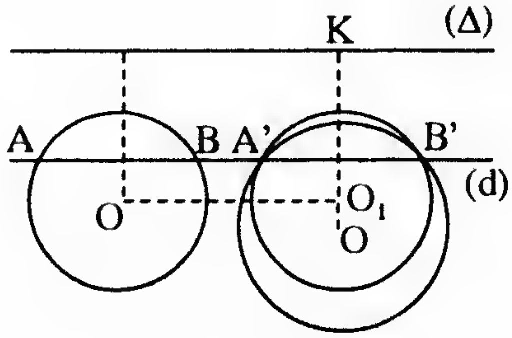
$\Delta BDD'$ dựng được $\Leftrightarrow |a - b| < 2c < a + b$.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R'), $R \neq R'$ và một đường thẳng (Δ). Hãy dựng một đường thẳng (d) song song với (Δ) cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, A', B' sao cho AB = A'B'

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường thẳng (d) song song với (Δ), cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, A', B' sao cho AB = A'B'.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.



Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AA'}$ thì (O, R) có ảnh là (O_1, R) đi qua A' và B' với I là gao điểm của đường thẳng Ox // (Δ).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng Ox // (Δ).
- Dựng $O'K \perp (\Delta)$, O'K cắt Ox tại I.
- Dựng (O_1, R) và (O_1, R) cắt (O', R') tại A' và B'

thì đường thẳng A'B' là đường thẳng (d) phải dựng.

Chứng minh: Vì:

- $(d) \perp O'K$ nên (d) // (Δ).
- (d) cắt (O_1, R) tại A', B' nên (d) cắt (O, R) tại A, B và AB = A'B'.

Biện luận: Bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi:

Hai đường tròn (I, R) và (O', R') cắt nhau.

Khi đó bài toán chỉ có một nghiệm.

Bài toán 5: Hệ toạ độ đối với phép tịnh tiến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta trình bày phương pháp thực hiện hai dạng toán:

Dạng 1 Xác định điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(x_0; y_0)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$.

Khi đó, toạ độ điểm $M_1(x; y)$ được cho bởi:

$$\begin{cases} x = a + x_0 \\ y = b + y_0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Tìm phương trình của hình $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của hình $(\mathbf{H})$: $f(x, y) = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$.

Khi đó, mỗi điểm $M(x; y) \in (\mathbf{H_1})$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0; y_0) \in (\mathbf{H})$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (H) \\ x = x_0 + a \\ y = y_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ x_0 = x - a \\ y_0 = y - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x - a, y - b) = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của $(\mathbf{H_1})$.

Ví dụ 1: Tìm toạ độ của điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(1; -3)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1; 2)$.

Giải

Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $M_1(2; -1)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x ; y) thành điểm M'(x', y'), trong đó:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}.$$

a. Cho hai điểm $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Hãy tìm toạ độ của M' và N'.

b. Tính khoảng cách d giữa M và N, khoảng cách d' giữa M' và N'.

c. Phép F có phải là phép dời hình hay không ?

d. Khi $\alpha = 0$, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha + a; x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha + b)$,

$N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha + a; x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha + b)$,

b. Ta lần lượt có:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

$$(d')^2 = (M'N')^2 = [(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha) - (x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha)]^2 + [(x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha) - (x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)]^2$$

$$= [(x_2 - x_1).\cos\alpha - (y_2 - y_1).\sin\alpha]^2 + [(x_2 - x_1).\sin\alpha + (y_2 - y_1).\cos\alpha]^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2.\cos^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\sin^2\alpha + (x_2 - x_1)^2.\sin^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\cos^2\alpha$$

$$= (x_2 - x_1)^2.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_2 - y_1)^2.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

c. Từ (1) và (2) suy ra d = d' (hay MN = M'N').

Vậy, phép biến hình F bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên theo định nghĩa nó là một phép dời hình.

d. Với $\alpha = 0$, ta thấy:

$$\begin{cases} x' = x\cos 0 - y\sin 0 + a \\ y' = x\sin 0 + y\cos 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \text{F là phép tịnh tiến.}$$

Ví dụ 3: Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d): $x + 3y - 2 = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1; 1)$.

Giải

Mỗi điểm $M(x, y) \in (d_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1; 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ x - x_0 = 1 \\ y - y_0 = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (x - 1) + 3(y - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (d_1).

Ví dụ 4: Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường thẳng (C): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2; 1)$.

Giải

Mỗi điểm $M(x; y) \in (C_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2, 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (C) \\ x = x_0 + 2 \\ y = y_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 4 \\ x_0 = x - 2 \\ y_0 = y - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 2 + 2)^2 + (y - 1 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1).

Ví dụ 5: Hãy tìm vectơ $\vec{v}(a; b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ theo $\vec{v}$ ta nhận được đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

Giải

Từ giả thiết, ta có:

$$g(x) = f(x + a) + b$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = [(x + a)^3 + 3(x + a) + 1] + b$$

$$= x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 + 1)x + a^3 + 3a + 1 + b.$$

suy ra:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $g(x) = f(x - 1) + 2$, tức là có vectơ $\vec{v}(-1; 2)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Xác định phép tịnh tiến biến ΔAB_1C_1 thành:

a. ΔB_1CA_1. b. ΔC_1A_1B.

Bài 2. Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì d trùng d' ? d song song với d' ? d cắt d' ?

Bài 3. Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn (O, R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm ΔABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 4. Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD kẻ các đường cao BK và BH của nó. Biết rằng KH = a, BD = b. Tính khoảng cách từ B đến trực tâm E của ΔBHK theo a và b.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD, $AB = 6\sqrt{3}$, $CD = 12$, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 120^0$, $\hat{D} = 90^0$. tìm độ dài các cạnh BC và AD.

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1,R) và (O_2,R) cắt nahu tại A và B. Một đường thẳng (d) vuông góc với AB và cắt (O_1,R) tại C và D, cắt (O_2,R) tại E và F với $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{EF}$.

a. Chứng minh độ lớn $\widehat{CAE}$ không phụ thuộc vào vị trí của (d)

b. Tính độ dài đoạn CE theo R và AB = a.

Bài 7. Cho tứ giác lồi ABCD và M là ba điểm bên trong tứ giác đó sao cho ABMD là hình bình hành. Chứng minh rằng: Nếu $\widehat{CBM} = \widehat{CBM}$ thì $\widehat{ACD} = \widehat{BDM}$.

Bài 8. Cho ΔABC nhọn và BC = a, CA = b, AB = c. gọi H là giao điểm ba đường cao. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{4}(a.AH + b.BH + c.CH)$.

Bài 9. Cho ΔABC, gọi I là trung điểm thuộc đoạn AC. Trên tia IB lấy một điểm B'. Dựng các hình bình hành BB'A'A, BB'C'C và AA_1C_1C sao cho A là trung điểm của $A'A_1$. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành AA_1C_1C bằng tổng diện tích các hình bình hành BB'A'A, BB'C'C.

Bài 10. Trong hình thang ABCD có BC//AD. Điểm M là giao điểm của các đường phân giác góc A và góc B; N là giao điểm của các đường phân giác góc C và D. Chứng minh rằng:

$$2MN = |AB + CD - BC - AD|.$$

Bài 11. Cho đường tròn (O) và hai điểm A và B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Bài 12. Cho ΔABC, có A cố định, góc A không đổi và vectơ $\overrightarrow{BC}$ không đổi. Tìm quỹ tích các đỉnh B và C.

Bài 13. Cho ΔABC, có AB cố định. Đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC cố định. Gọi H là trực tâm ΔABC và P, Q là giao điểm của đường tròn tâm C bán kính CH với đường tròn tâm H bán kính HC. Tìm quỹ tích P và Q.

Bài 14. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng cố định (d). Điểm A di động trên đường tròn. Tìm quỹ tích các đỉnh B, C của hình bình hành OABC sao cho AC song song với (d) và AC = a cho trước.

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD có đường chéo BD cố định, A di động trên đường tròn tâm D bán kính R.

a. Tìm quỹ tích đỉnh C của hình bình hành ABCD.

b. Tìm quỹ tích đỉnh E của hình bình hành ADBE.

Bài 16. Cho hình bình hành ABCD có B, D di động trên đường tròn tâm O, bán kính R = OA và BD = l không đổi.

a. Tìm quỹ tích trung điểm I của BD.

b. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABD.

Bài 17. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có A, B cố định. Hai điểm C, D di động sao cho AD = a, CD = b (a,b>0 cho trước). Tìm tập hợp điểm C.

Bài 18. Cho đường tròn (O, R) cố định và một đường thẳng (d). Một đường tròn (γ) di động có bán kính r không đổi và luôn tiếp xúc ngoài với (O, R). Dựng hai tiếp tuyến của (γ) song song với (d), hai tiếp điểm M, M'. Tìm tập hợp các điểm M, M' khi (γ) di động.

Bài 19. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB cố định. Gọi MN là một đường kính di động. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng AM, AN lần lượt tại P và Q. Tìm tập hợp các trực tâm của ΔMPQ và ΔNPQ.

Bài 20. Cho ΔABC. Hãy dựng đường thẳng (d) song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N sao cho AM = CN.

Bài 21. Dựng hình bình hành ABCD, biết AB = a còn C, D thuộc hai đường tròn (d_1) và (d_2).

Bài 22. Dựng tứ giác ABCD biết: AB = a, BC = b, CD = c, AD = d và góc nhọn của AB, CD là α.

Bài 23. Cho hai đường tròn (O), (O_1) và vectơ $\vec{a}$. Dựng đoạn thẳng PQ trong đó $P \in (O)$, $Q \in (O_1)$ và $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$.

Bài 24. Hãy dựng một đường tròn có bán kính R qua một điểm A và chắn trên một đường thẳng (d) một dây cung có độ dài l cho trước.

Bài 25. Trên đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD không cắt nhau Hãy dựng điểm M trên (O) sao cho hai dây cung MA và MB chắn trên dây CD đoạn EF có độ dài a cho trước (a nhỏ hơn độ dài dây CD).

Bài 26. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây:

- Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm M(x, y) thành điểm M'(y; –x).
- Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm M(x, y) thành điểm M'(2x; y).

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình.

Bài 27. Tìm toạ độ của điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(3; 2)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(-4; 1)$.

Bài 28. Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (d): $x + 2y - 13 = 0$ và $\vec{v}(1; 1)$.

b. (d): $2x - 6y + 3 = 0$ và $\vec{v}(\frac{1}{2}; -3)$.

Bài 29. Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (C): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $\vec{v}(-2; 1)$.

b. (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$ và $\vec{v}(0; 3)$.

Bài 30. Hãy tìm vectơ $\vec{v}(a; b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị y = f(x) theo $\vec{v}$ ta nhận được đồ thị hàm số y = g(x), biết:

a. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ và $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

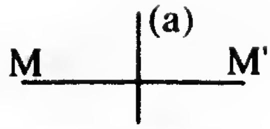
b. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

CHỦ ĐỀ 3
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Nhắc lại: *Điểm* M' *được gọi là đối xứng với điểm* M *qua đường thẳng* a *nếu* a *là đường trung trực của đoạn thẳng* MM'.



Trường hợp đặc biệt, nếu M *nằm trên* a *thì ta xem* M *đối xứng với chính nó qua* a.

Định nghĩa 1: *Phép đối xứng qua đường thẳng* a *là phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành* M' *đối xứng với* M *qua đường thẳng* a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Vậy:

$M' = Đ_a(M) \Leftrightarrow$ a là trung trực đoạn MM'.

Định lí: *Phép đối xứng trục là phép dời hình.*

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy,

- Phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

- Phép đối xứng qua trục Oy biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

3. TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Định nghĩa 2: *Đường thẳng* d *được gọi là trục đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng trục* $Đ_d$ *biến* **H** *thành chính nó, tức là* $Đ_d$**(H) = H**.

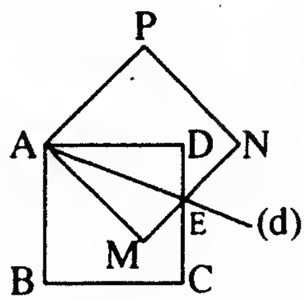
II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép đối xứng trục biến hình (H_1) thành hình (H_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đối xứng trục.

Ví dụ 1: Cho hai hình vuông ABCD và AMNP có cạnh bằng a. Tìm phép đối xứng trục biến hình vuông ABCD thành AMNP.



Giải

Giả sử CD cắt MN tại E, ta đi chứng minh :

$S_{(AE)}(ABCD) = APNM$.

Thật vậy:

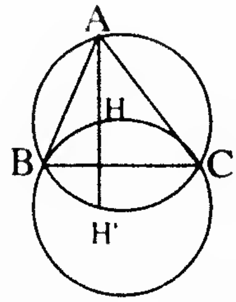
$\Delta AED = \Delta AEM \Rightarrow M = S_{(AE)}(D)$.

$\Delta AEC = \Delta AEN \Rightarrow N = S_{(AE)}(C)$.

$\Delta AEB = \Delta AEP \Rightarrow P = S_{(AE)}(B)$.

Ví dụ 2: Cho hai điểm B và C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



Giả sử AH cắt đường tròn tại H'.

Ta có:

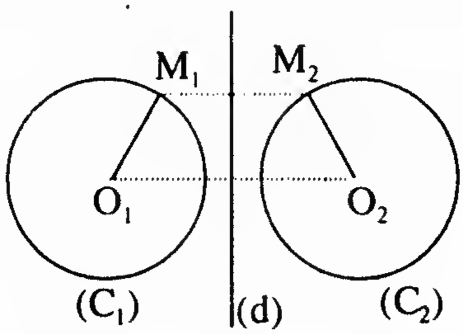
$H'CB = H'AB = HCB \Rightarrow \Delta H'CH$ cân tại C

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của H'H $\Rightarrow H = Đ_{BC}(H')$.

Và vì $H' \in (O)$ nên $H \in Đ_{BC}((O))$.

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và đều có bán kính R. Tìm phép đối xứng trục biến (C_1) thành (C_2).

Giải



Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua S_d.

Vì O_2M_2 và O_1M_1 đối xứng nhau qua (d), nên ta có:

$O_2M_2 = O_1M_1$.

Ta có:

$M_1 \in (C_1) \Leftrightarrow O_1M_1 = R \Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua S_d. Ta có:

$M_2 \in (C_2) \Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow O_1M_1 = R \Rightarrow M_1 \in (C_1)$

Vậy, ta thấy (C_2) là ảnh của (C_1) qua S_d.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. *Với bài toán định tính*, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = Đ_a(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = Đ_a(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng trục để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đối xứng trục để giải các yêu cầu của bài toán.

2. *Với bài toán định lượng*, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Bằng việc thiết lập được các phép tịnh tiến thích hợp, ngoài việc chứng minh được các tính chất hình học ta còn có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Dạng 2: Bằng việc lựa chọn phép đối xứng trục thích hợp cho điểm M, ta đưa bài toàn giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về các biểu thức độ dài, khi đó ta cần nhớ các kết quả:

- $MA + MB \geq AB$.
- $|MA - MB| \leq AB$.

Cụ thể "*Cho đường thẳng* (d) *và hai điểm* A, B *cùng phía với* (d). *Tìm điểm* M *trên* (d) *sao cho* MA + MB *nhỏ nhất*", khi đó:

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d)

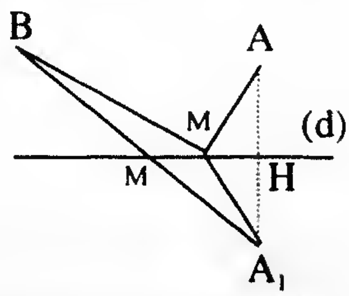
Ta có:

$$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B.$$

Vậy, ta được:

$$(MA + MB)_{Min} = A_1B,$$

đạt được khi A_1, M, B thẳng hàng.



Ví dụ 1: Cho hai điểm B và C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

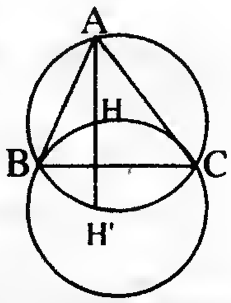
Giả sử AH cắt đường tròn tại H'.

Ta có:

$H'CB = H'AB = HCB \Rightarrow \Delta H'CH$ cân tại C

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của H'H $\Rightarrow H = Đ_{BC}(H')$.

Và vì $H' \in (O)$ nên $H \in Đ_{BC}((O))$.



Ví dụ 2: Cho ΔABC có BC = a, CA = b, AB = c, p là nửa chu vi, h_a là độ dài đường cao từ A. Chứng minh rằng $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

Giải

Dựng đường thẳng (d) qua A song song cới BC.

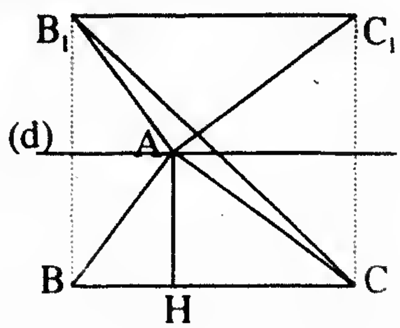
Gọi B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của B, C qua đường thẳng (d), ta có:

$AC_1 = AC = b$,

$AB_1 = AB = c$,

$BB_1 = CC_1 = 2AH = 2h_a$,

$BB' \perp BC$.



Xét ΔAB_1C, ta có:

$$AB_1 + AC \geq B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} \Leftrightarrow b + c \geq \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 \leq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = p(p-a) \Leftrightarrow h_a \leq \sqrt{p(p-a)}\text{, đpcm.}$$

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên để chứng minh tính chất $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ chúng ta đã sử dụng một phép đối xứng trục (d), tuy nhiên điều đáng phải minl hoạ được ở đây là tại sao lại chọn trục (d) như vậy, điều này có thể được lý giả sơ lược như sau:

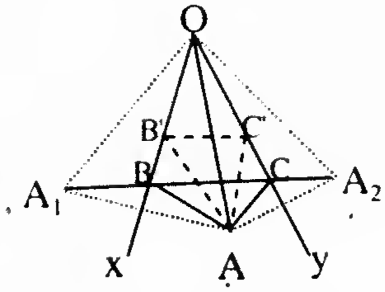
- Việc lựa chọn phép đối xứng trục (d) sẽ nhận được phần tử trung giai quan trọng là B_1C, phần tử này có được biểu diễn thông qua b và c hoặ qua a và h_a, từ đó nhận được mối liên hệ giữa a, b, c và h_a.
- Các em học sinh hãy trả lời thêm câu hỏi "*Có tồn tại phép đối xứng trụ khác* (d) *không và nếu có thì tính chất của phép đối xứng đó là gì ?*"

<u>**Ví dụ 3:**</u> Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác địnl điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Giải

Trước tiên:

- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox.
- Gọi A_2 là điểm đối xứng với A qua Oy.
- Nối A_1A_2 cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B và C.



Ta sẽ đi chứng minh ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Thật vậy:

$$CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2$$
$$= A_1A_2 \geq A_1B' + B'C' + C'A_2 = AB' + B'C' + C'A = CV_{\Delta AB'C'}$$

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trực tâm củ tam giác.

a. Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của $\Delta AB($ nằm trên đường tròn (O, R). Từ đó suy ra các đường tròn (HBC), (HCA) (HAB) và (O) bằng nhau.

b. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB) Chứng minh ΔABC và $\Delta O_1O_2O_3$ bằng nhau.

Giải

a. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là điểm đối xứng của H qua các cạnh BC, CA, AB.

- Xét phép đối xứng trục BC, ta được:

$$S_{(BC)}: B\hat{H}C \mapsto B\hat{H}_1C \Rightarrow B\hat{H}_1C = B\hat{H}C.$$

Vì :

$$B\hat{H}C + B\hat{A}C = 180^0 \Leftrightarrow B\hat{H}_1C + B\hat{A}C = 180^0$$

$\Rightarrow$ tứ giác ABH_1C nội tiếp được $\Rightarrow H_1 \in (O, R)$.

- Chứng minh tương tự, ta được $H_2 \in (O, R)$, $H_3 \in (O, R)$.

Ta có:

$S_{(BC)}[(HBC)] = (H_1BC) = (O, R)$

$S_{(CA)}[(HCA)] = (H_2CA) = (O, R)$

$S_{(AB)}[(HAB)] = (H_3AB) = (O, R)$

$\Rightarrow (HBC) = (HCA) = (HAB) = (O,R)$, đpcm

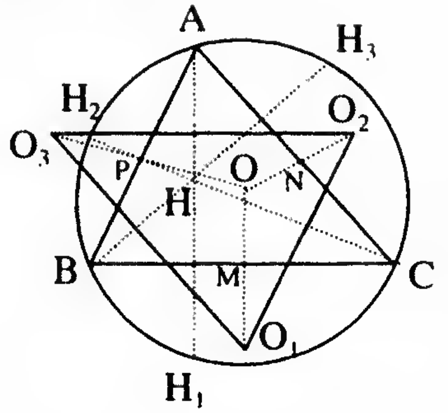
). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Ta có ngay:

$S_{(BC)}: O \mapsto O_1$

$S_{(CA)}: O \mapsto O_2$

$S_{(AB)}: O \mapsto O_3$



Suy ra:

$\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow O_1O_2 = BA,$

$\overrightarrow{O_2O_3} = 2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow O_2O_3 = CB,$

$\overrightarrow{O_3O_1} = 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow O_3O_1 = AC,$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$, đpcm.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng trục $Đ_a$, biến điểm E di động thành điểm M .

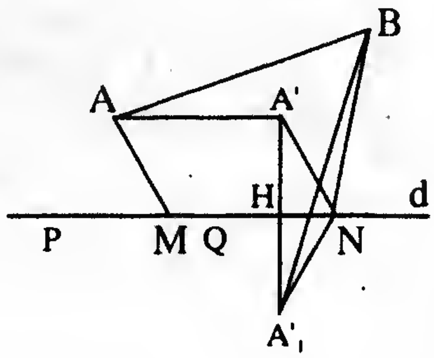
Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép đối xứng trục $Đ_a$.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P , Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.

Giải

Giả sử xác định được hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.



Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{PQ}$, ta được:

$T_{\overrightarrow{PQ}}(A) = A'$; $T_{\overrightarrow{PQ}}(M) = N$

Suy ra:

AM = A'N và AM + BN = A'N + BN.

Tới đây, bài toán được chuyển về việc tìm điểm N thuộc d để A'N + BN bé nhất.

Gọi A'_1 là điểm đối xứng với A' qua (d), ta có:

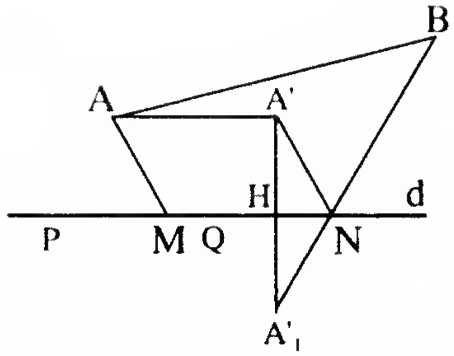
$A'N + BN = A'_1N + BN \geq A'_1B$.

Vậy, ta được:

$$(A'_1N + BN)_{Min} = A'_1B,$$

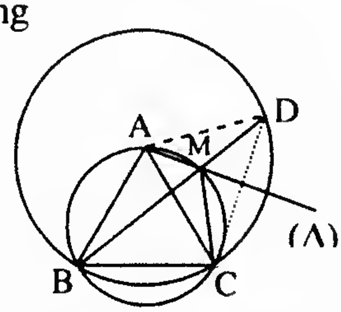
đạt được khi A'_1, N, B thẳng hàng.

Tới đây, chúng ta có cách dựng:



- Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{PQ}$, ta được $T_{\overrightarrow{PQ}}(A) = A'$.
- Lấy điểm A'_1 là điểm đối xứng với A' qua (d).
- Nối A'_1B cắt d tại N.
- Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{QP}$, ta được $T_{\overrightarrow{QP}}(N) = M$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC cân tại A. Một đường thẳng di động (Δ) qua A. Gọi D là điểm đối xứng của C qua (Δ). Đường thẳng BD cắt (Δ) tại M. Tìm quỹ tích các điểm D và M.



Giải

a. *Tìm tập hợp điểm* D: Từ giả thiết suy ra AD = AC không đổi, do đó quỹ tích các điểm D thuộc đường tròn tâm A, bán kính AC.

b. *Tìm tập hợp điểm* M: Ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 2\widehat{MDC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BAC} \text{ không đổi.}$$

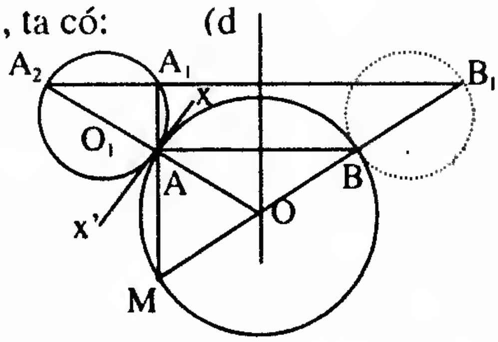
Vậy quỹ tích các điểm M thuộc cung tròn chứa góc A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O, R) trên đó có hai điểm A và B, một đường tròn (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O) tại A. Một điểm M di động trên (O), tia MA cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai A_1. Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia MB tại B_1. Tìm tập hợp điểm B_1.

Giải

Gọi giao điểm thứ hai của B_1A_1 với đường tròn (O_1) là A_2.

Kẻ tiếp tuyến chung x'x của (O) và (O_1) tại A, ta có:



$$\widehat{A_1B_1B} = \widehat{ABM} = \widehat{x'AM}$$

$$= \widehat{xAA_1} = \widehat{AA_2A_1}.$$

Suy ra hình thang ABB_1A_2 cân, nên A_2 và B_1 đối xứng với nhau qua trung trực (d) của AB.

Ta có:

- Khi M di động trên (O) thì A_2 di động trên (O_1), suy ra tập hợp các điểm A_2 là đường tròn (O_1).
- $B_1 = S_d(A_2)$ nên tập hợp các điểm B_1 là đường tròn (O_2) với

$$(O_2) = S_d(O_1).$$

Bài toán 4: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp áp dụng

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và một đường thẳng d.

a. Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MN.

b. Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O ; R) và tiếp tuyến của IT' của (O' ; R') hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của góc đó.

Giải

a. Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_d$, ta có:

$Đ_d((O)) = (O_1)$.

Khi đó:

- Xác định giao điểm M của (O') với (O).
- Xác định điểm N là điểm đối xứng với M qua d.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Ví dụ 2: Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx'. Dựng điểm $A \in xx'$ sao cho $P\hat{A}x = Q\hat{A}x'$.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm $A \in xx'$ sao cho

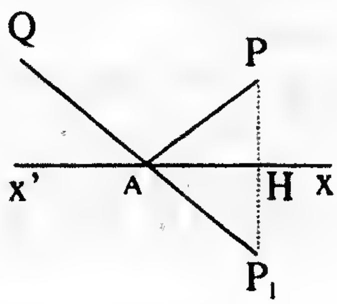
$P\hat{A}x = Q\hat{A}x'$.

Thực hiện phép đối xứng trục (xx').

$S_{(xx')}: P \mapsto P_1$,

Khi đó

$P\hat{A}x = P_1\hat{A}x = Q\hat{A}x' \Leftrightarrow P_1$, A, Q thẳng hàng.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng điểm P_1 với $P_1 = S_{(xx')}(P)$
- Lấy điểm chung A của (xx') và (P_1Q)

Khi đó A là điểm phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có:

$Q\hat{A}x' = P_1\hat{A}x = P\hat{A}x$.

Biện luận: Số nghiệm của bài toán bằng số nghiệm chung của (xx') và (P_1Q), suy ra luôn tồn tại duy nhất một điểm A.

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), hai đỉnh B và D trên (d).

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD có A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), B và D ở trên (d).

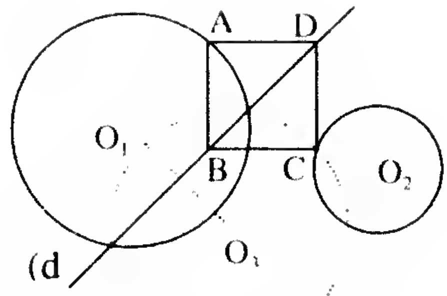
Thực hiện phép đối xứng trục (d).

$S_{(d)}: A \mapsto C$,

$(O_1) \mapsto (O_3)$.

Khi đó $C \in (O_3)$.

Vậy C là một trong hai giao điểm của (O_3) và (O_2).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đường tròn (O_3) với $(O_3) = S_{(d)}[(O_1)]$
- Lấy điểm chung C của (O_3) và (O_2)
- Dựng điểm A với $A = S_{(d)}(C)$.
- AC cắt (d) tại I
- Trên (d) dựng B và D đối xứng nhau qua I sao cho IB = IC, thì ABCD là hình vuông phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng, tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình vuông và:

- $B, D \in (d)$, $C \in (O_2)$.
- Vì $(O_1) = S_{(d)}[(O_3)]$, $A = S_{(d)}(C)$, $C \in (O_3)$ nên $A \in (O_1)$

Biện luận: Số nghiệm hình của bài toán bằng số nghiệm chung của (O_3) và (O_2).

<u>Ví dụ 4:</u> Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng điểm M trên (d) sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tới (O_1) và (O_2) tạo thành một góc nhận (d) làm đường phân giác.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm M thoả mãn điều kiện đầu bài.

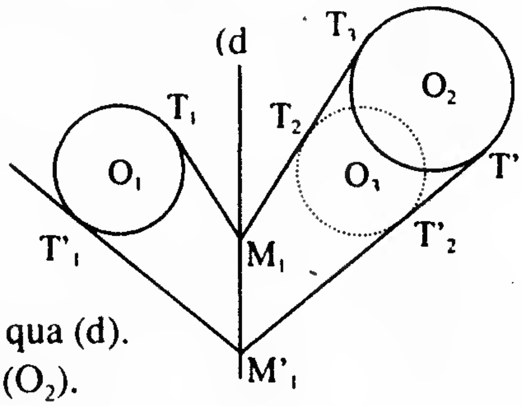
Thực hiện phép đối xứng trục (d).

$S_{(d)}(MT_1) = (MT_3)$.

$S_{(d)}(O_1) = (O_3)$.

Khi đó MT_3 cũng là tiếp tuyến của (O_3).

Vậy MT_3 là một tiếp tuyến chung của (O_3) và (O_2).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

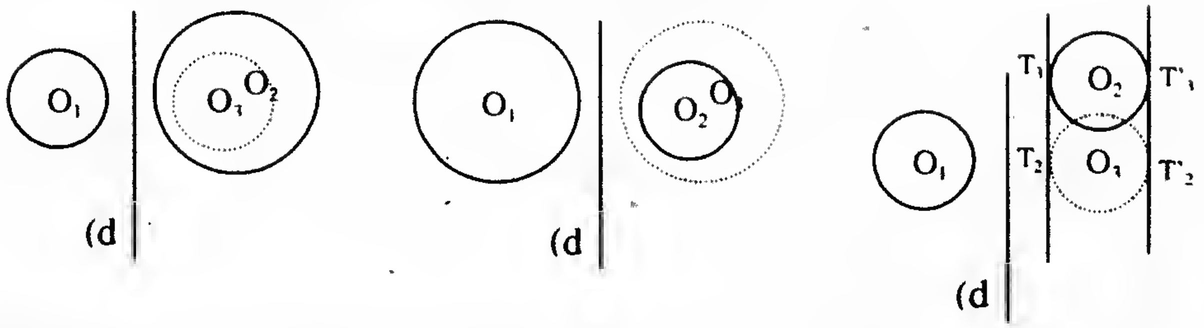
- Dựng đường tròn (O_3) đối xứng với (O_1) qua (d).
- Dựng tiếp tuyến chung T_2T_3 của (O_3) và (O_2).
- Đường thẳng T_2T_3 cắt (d) tại M

Khi đó M là điểm cầm dựng.

Chứng minh: Thật vậy lấy $MT_1 = S_{(d)}(MT_3) \Rightarrow MT_1$ tiếp xúc với (O_1) và góc $T_1\widehat{M}T_2$ nhận (d) làm đường phân giác.

Biện luận: Số nghiệm điểm M của bài toán bằng số giao điểm của tiếp tuyến chung của (O_3) và (O_2) với đường thẳng (d).

Hình sau minh hoạ ba trường hợp vô nghiệm:



Bài toán 5: Hệ toạ độ của phép đối xứng trục.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy,

- Phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

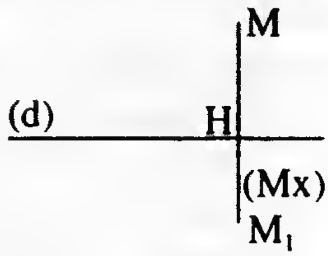
- Phép đối xứng qua trục Oy biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

Trong phần này chúng ta xem xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toán tổng quát.

Dạng 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường thẳng (d): Ax + By + C = 0.

Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \, // \, \overrightarrow{n_d}(A, B) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x_{M_1} - x_M) - A(y_{M_1} - y_M) = 0 \\ A\left(\dfrac{x_{M_1} + x_M}{2}\right) + B\left(\dfrac{y_{M_1} + y_M}{2}\right) + C = 0 \end{cases}. \quad (I)$$

Bước 2: Giải hệ (I) ta được toạ độ điểm M_1.

Chú ý:

1: Cũng có thể thực hiện theo cách:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của M trên (d).

Bước 2: Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua (d) thì H là trung điểm MM_1, ta được:

$$\begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M \end{cases}.$$

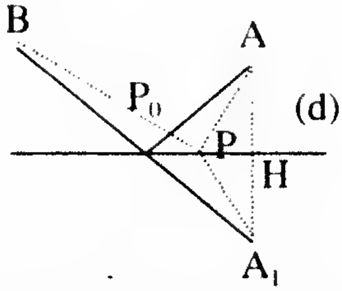
2. Ảnh của điểm $M(x_0, y_0)$ qua phép đối xứng:

- Trục Ox là $M_1(x_0; -y_0)$.
- Trục Oy là $M_1(-x_0; y_0)$.

3. Như chúng ta đã biết, việc tìm ra toạ độ điểm M_1 sẽ cho phép ta giải được dạng toán với yêu cầu:

"*Cho đường thẳng* (d) *và hai điểm* A, B *cùng phía với* (d). *Tìm điểm* P *trên* (d) *sao cho* PA + PB *nhỏ nhất*", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d), suy ra toạ độ A_1.



Bước 2: Gọi $P_0 = (A_1B) \cap (d)$

$$\begin{cases} P_0 \in (d) \\ P_0, A, B \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } P_0.$$

Bước 3: Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B$.

Vậy $(PA + PB)_{Min} = A_1B$, đạt được khi:

A_1, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

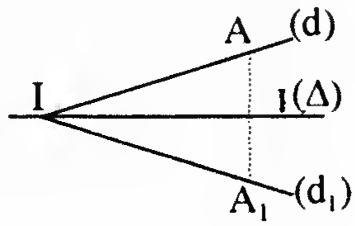
Dạng 2: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ).

Ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I.

Bước 2: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (Δ).



Bước 3: Đường thẳng (d_1) qua I và A_1.

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{qua } A_1 \end{cases}.$$

Khả năng 2: Nếu $(d) // (\Delta)$. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình của (d), (Δ) dưới dạng:

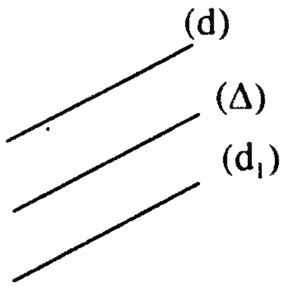
$$(d): Ax + By + C_d = 0,$$
$$(\Delta): Ax + By + C_\Delta = 0.$$

Bước 2: Khi đó:

$$(d_1): Ax + By + C = 0$$

với C được xác định bởi:

$$C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C).$$



Dạng 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C): $f(x, y) = 0$ qua đường thẳng (d).

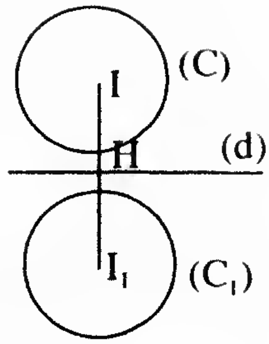
Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C).

Bước 2: Xác định toạ độ điểm I_1 đối xứng với I qua (d).

Bước 3: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tam } I_1 \\ \text{bkinh } R \end{cases}.$$



Chú ý. Trong trường hợp đường thẳng (d) có dạng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với mỗi $M(x, y) \in (C_1) \Leftrightarrow \exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M qua đường thẳng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) $\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2\alpha \\ y_1 = y \end{cases} \quad \left(\text{hoặc } \begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 = x \\ y_1 + y = 2\beta \end{cases}\right) \qquad \text{(I)}$$

Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho đường thẳng (d): $3x + 4y - 12 = 0$ và điểm M(7; 4). Tìm toạ độ điểm M_1 là điểm đối xứng với M qua (d).

Giải

Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \,//\, \overrightarrow{n_d}(3; 4) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-7) - 3(y-4) = 0 \\ 3\left(\dfrac{x+7}{2}\right) + 4\left(\dfrac{y+4}{2}\right) - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $M_1(1; -4)$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất, biết A(1; 1) và B(3; 3), tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox $\Rightarrow$suy ra $A_1(1; -1)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$, suy ra $P_0(x; 0)$, A, B thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP_0} \,//\, \overrightarrow{AB} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0(\frac{3}{2}; 0).$$

Ta có

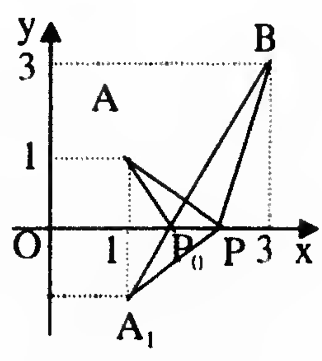
$PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B.$

Vậy, ta thấy:

$$(PA + PB)_{Min} = A_1B = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

đạt được khi:

A_1, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0(\frac{3}{2}; 0)$.



Ví dụ 1: Cho ΔABC biết $A(2; -1)$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_C): $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình cạnh BC.

Giải

Nhận xét rằng: nếu lấy A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A qua (d_B) và (d_C) thì $A_1, A_2 \in BC$.

Vậy, phương trình đường thẳng (A_1A_2) cũng chính là phương trình đường thẳng (BC). Ta lần lượt đi xác định A_1, A_2:

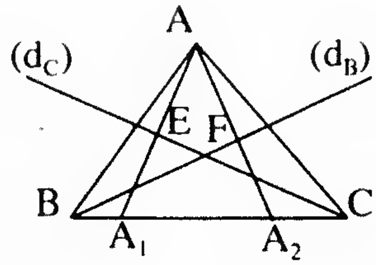
a. *Xác định A_1.*

Gọi (d_1) là đường thẳng thoả mãn :

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A \\ (d_1) \perp (d_B) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } A(2,-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2,1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x + y - 3 = 0.$$

Gọi $E = (d_1) \cap (d_B)$, toạ độ điểm E là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1; 1).$$



Vì E là tung điểm AA_1, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_1} = 2x_E - x_A = 0 \\ y_{A_1} = 2y_E - y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A_1(0; 3).$$

b. *Xác định A_2*: Tương tự, ta được $A_2(-2; -5)$.

Vậy, phương trình (BC) được xác định bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } A_1(0,3) \\ \text{qua } A_2(-2,-5) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): 4x - y + 3 = 0.$$

Ví dụ 3: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ), biết:

a. (d): $4x - y + 3 = 0$ và (Δ): $x - y = 0$.

b. (d): $6x - 3y + 4 = 0$ và (Δ): $4x - 2y + 3 = 0$.

Giải

a. Nhận xét rằng $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$, khi đó toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; -1).$$

Lấy điểm $A(0; 3) \in (d)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (Δ), ta có:

- $(AH) \perp (\Delta) \Rightarrow (AH)$: $x + y + C = 0$.
- $A \in (AH) \Leftrightarrow 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$.

Vậy (AH): $x + y - 3 = 0$. Khi đó toạ độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua $(\Delta) \Rightarrow$ H là trung điểm $AA_1 \Rightarrow A_1(3; 0)$.

Đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I(-1,-1) \\ \text{qua } A_1(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow (d_1): x - 4y - 3 = 0$$

b. Nhận xét rằng $(d)//(\Delta)$, khi đó viết lại phương trình hai đường thẳng dưới dạng:

$$(d): 2x - y + \frac{4}{3} = 0 \text{ và } (\Delta): 2x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

Khi đó (d_1): $2x - y + C = 0$, với C được xác định bởi:

$$C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3} + C) \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d_1): $2x - y + \frac{5}{3} = 0$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C_1) có phương trình:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0,$$

Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đối xứng có trục Oy.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Mỗi điểm $M(x, y) \in (C_1')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C_1)$ qua phép đối xứng có trục Oy, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (C_1) \\ \text{Oy là trung trực của } M_0M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 5y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-x)^2 + y^2 - 4(-x) + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0. \quad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1').

Cách 2: Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2; -\frac{5}{2})$ và bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Đường tròn (C_1') đối xứng với đường tròn (C_1) qua Oy có:

$$\begin{cases} \text{tam } I_1'(-2; -\frac{5}{2}) \\ \text{bán kính } R_1' = \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1'): (x + 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (C_1'): x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$$

Ví dụ 5: Cho ΔABC biết $B(0, 1)$, $C(1, 0)$ và trực tâm $H(2, 1)$. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Lập phương trình cạnh AB, thoả mãn :

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtpt } \overrightarrow{CH} \end{cases}$$

Lập phương trình cạnh AC, thoả mãn :

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } C \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BH} \end{cases}$$

Từ đó xác định được toạ độ điểm $A = (AB) \cap (AC)$.

Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Cách 2: Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua BC. Do đó:

Lập phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm H, B, C.

Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua BC.

Nhận xét: Cách 2 cho phép ta giải được bài toán mang tính quĩ tích như sau:

"*Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp* ΔABC, *biết phương trình cạnh* BC *và đường tròn ngoại tiếp* ΔHBC"

trong khi đó nếu thực hiện bằng cách 1 sẽ rất phức tạp.

<u>Ví dụ 6:</u> Cho hàm số:

$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$

Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Giải

Đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow$ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ (có dạng $y = -x + m$) nếu cắt đồ thị tại A và B thì trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = x + 2$.

Hoành độ giao điểm A, B là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 1 - m = 0 \qquad (1)$$

Giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = m - 2 \\ x_A x_B = -m - 1 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$I: \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I: \begin{cases} x_I = \dfrac{m-2}{2} \\ y_I = \dfrac{m+2}{2} \end{cases}.$$

Thay toạ độ của I vào phương trình đường thẳng $y = x + 2$, ta được:

$$\frac{m+2}{2} = \frac{m-2}{2} + 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)} \Leftrightarrow I \text{ thuộc đường thẳng } y = x + 2$$

Vậy, đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện yêu cầu "*Chứng minh rằng đường thẳng* (d): y = ax + b *là trục đối xứng của đồ thị hàm số* y = f(x)", ta thực hiện như sau:

Bước 1: Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với (d), suy ra phương trình của

$$(\Delta): y = -\frac{1}{a}x + m.$$

Bước 2: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0. \qquad (1)$$

Sử dụng hệ thức viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 3: Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

Thay toạ độ của I vào (d) ⇒ nhận xét I ∈ (d).

Bước 4: Vậy, ta khẳng định được (d) là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Trong bài toán này ta không cần tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 7: Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị (C) và đối xứng nhau qua đường thẳng (d): y = x − 1, biết:

$$(C): y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Giải

Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng (d)

⇔ AB ⊥ (d) và trung điểm I của AB thuộc (d).

- Vì AB vuông góc với (d) nên (AB): y = −x + m.

Hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m+1)x + m = 0. \qquad (1)$$

Để A, B tồn tại thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta_g > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow m > 3 + \sqrt{8}$ hoặc $m < 3 - \sqrt{8}$.

Khi đó, giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m+1}{2} \\ x_A x_B = m/2 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$I:\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I:\begin{cases} x_I = \dfrac{m+1}{4} \\ y_I = \dfrac{3m-1}{4} \end{cases}.$$

- Điểm I ∈ (d) nên:

$$\frac{3m-1}{4} = \frac{m+1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Với m = −1 phương trình (1) có dạng:

$$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1/\sqrt{2} \\ x_B = -1/\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\frac{1}{\sqrt{2}}/, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện yêu cầu "*Tìm hai điểm* A, B *thuộc đồ thị hàm số* y = f(x) *đối xứng qua đường thẳng* (d): y = ax + b", ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm miền xác định D của hàm số y = f(x).

Bước 2: Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với (d), suy ra phương trình của (Δ): $y = -\frac{1}{a}x + m$.

Bước 3: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0. \qquad (1)$$

Để tồn tại A, B thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt thuộc D

⇔ ***tham số***.

Sử dụng hệ thức viét ta được

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 4: Gọi I là trung điểm AB, ta có

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

- Hai điểm A, B đối xứng qua đường thẳng (d) ⇔ I∈(d) ⇔ m.
- Thay m vào (1) ta có được hoành độ A, B là x_A, x_B.
- Khi đó: $A(x_A; -\frac{1}{a}x_A + m)$ & $B(x_B; -\frac{1}{a}x_B + m)$.

Ví dụ 8: Cho hàm số:

$$y = x^2 + 2x - 1.$$

Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Giải

Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$$

ta được :

$$Y = (X - 1)^2 + 2(X - 1) - 1 \Leftrightarrow Y = X^2 - 2 \text{ là hàm số chẵn.}$$

Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Nhận xét:

1. Đồ thị hàm số bậc hai:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

luôn nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

2. Như vậy, để chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng :

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số chẵn.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

Ví dụ 9: Cho hàm số:

$$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1.$$

Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số có một trục đối xứng thẳng đứng.

Giải

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = a$.

Khi đó, với phép biến đổi toạ độ :

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số được chuyển về dạng :

$$Y = (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1 \text{ là hàm số chẵn.}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} Y &= (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1 \\ &= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X - 4(X^3 + 3X^2a + \\ &\qquad + 3Xa^2 + a^3) - 2(X^2 + 2Xa + a^2) + 12(X + a) - 1 \\ &= X^4 + 4(a - 1)X^3 + 2(3a^2 - 6a - 1)X^2 + 4(a^3 - 3a^2 - a + 3)X + \\ &\qquad + a^4 - 4a^3 - 2a^2 + 12a - 1. \end{aligned}$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-1) = 0 \\ 4(a^3 - 3a^2 - a + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, đồ thị hàm số có một trục đối xứng x = 1.

Chú ý:

1. Với các hàm số dạng trên, một câu hỏi phụ thường được đặt thêm vào sau khi xác định được trục đối xứng thẳng đứng của nó là " *Tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành* ", khi đó ta thực hiện như sau:
   Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:
   $$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1 = 0. \qquad (1)$$
   Đặt x = X + 1, phương trình (1) có dạng :
   $$X^4 - 8X^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 = 4 \pm \sqrt{10}$$
   $$\Leftrightarrow X = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{10}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}.$$
   Vậy đồ thị hàm số cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ $x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}$.
2. Với yêu cầu tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số y = f(x) nhận đường thẳng x = a làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:
   Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ :
   $$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$
   hàm số có dạng :
   $$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (2)$$
   Bước 2: Đồ thị hàm số nhận đường thẳng x = a làm trục đối xứng
   $\Leftrightarrow$ hàm số (2) là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.
   Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 10: Cho hàm số:

$$y = x^4 + 4x^3 + mx^2.$$

Xác định m để đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

Giải

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy là x = a (a ≠ 0). Khi đó, với phép biến đổi toạ độ :

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số

$$Y = (X + a)^4 + 4(X + a)^3 + m(X + a)^2 \text{ là hàm số chẵn.}$$

Ta có:

$$Y = (X + a)^4 + 4(X + a)^3 + m(X + a)^2$$
$$= X^4 + 4(a + 1)X^3 + 2(3a^2 + 6a + m)X^2 +$$
$$+ 2(2a^3 + 6a^2 + am)X + a^4 + 4a^3 + ma^2 \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+1)=0 \\ 2(2a^3+6a^2+am)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, với m = 4 đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$.

a. Những tam giác nào biến thành chính nó ?

b. Những đường tròn nào biến thành chính nó ?

Bài 2. Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và A_1B_1. Chứng minh rằng cần nhiều nhất là tích hai phép đối xứng trục để biến A thành A_1, B thành B_1.

Bài 3. Lấy một điểm M trên đường phân giác ngoài góc C của ΔABC. Chứng minh rằng MA + MB > CA + CB.

Bài 4. Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD).$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Bài 5. Cho hai đường thẳng Ax và By cùng vuông góc vớiAB, M và N là hai giao điểm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB}$. Trên Ax lấy điểm P, trên By lấy điểm Q sao cho M nhìn đoạn PQ dưới một góc vuông. Chứng minh rằng điểm N cũng nhìn đoạn PQ dưới một góc vuông.

Bài 6. Cho điểm M ở trong ΔABC, A' đối xứng với M qua đường phân giác của góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song đôi một.

Bài 7. Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng h, hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp nhỏ nhất.

Bài 8. Cho góc xOy và điểm M thuộc miền trong của góc. Qua M dựng đường thẳng cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ΔAOB có diện tích nhỏ nhất trong tất cả các tam giác tạo bởi các tia Ox, Oy và một đường thẳng bất kì qua M.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn.

a. Tìm ba điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, AB và AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔDEF theo các cạnh a, b, c của ΔABC.

Bài 10. Cho ΔABC, biết B, C thuộc đường thẳng (d) cố định, trực tâm H cố định và đường tròn ngoại tiếp ΔABC đi qua điểm P cố định. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 11. Cho góc nhọn xOy, ở bên trong góc đó có một tia Oz cố định, M là điểm di động trên tia Oz . Gọi M_1 và M_2 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua Ox và Oy. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn M_1M_2.

Bài 12. Cho đường tròn (O) và một dây cung AB của đường tròn đó. Tìm tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn (O) và có một cạnh là dây AB.

Bài 13. Dựng ảnh của ΔABC cho trước qua phép đối xứng trục mà trục là:

a. Đường thẳng AB.

b. Đường phân giác AD.

Bài 14. Dựng ảnh của đường tròn (O) cho trước qua phép đối xứng trục mà trục là:

a. Đường thẳng (d) không đi qua tâm O.

b. Đường thẳng (d) đi qua tâm O.

Bài 15. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với (d). Hãy xác định điểm $M \in (d)$ sao cho đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ nằm trên (d).

Bài 16. Cho đường thẳng xx' và hai điểm P, Q cùng nằm một phía đối với xx'. Dựng điểm $A \in xx'$ sao cho $\widehat{PAx} = 2\widehat{QAx'}$.

Bài 17. Cho ba đường tròn (d_1), (d_2) và (d_3). Dựng hình vuông ABCD có A, C thuộc (d_1), còn B, D theo thứ tự thuộc (d_2) và (d_3).

Bài 18. Trên đường tròn (O) cho hai dây cung AB và CD không cắt nhau và một điểm I trên dây CD. Dựng một điểm I trên dây CD. Dựng một điểm M trên (O) sao cho các dây cung AM và BN chắn CD một đoạn EF nhận I là trung điểm.

Bài 19. Cho góc xOy, tia đối của tia Ox là tia Ox'. Trong góc x'Ox có hai điểm A, B sao cho đoạn thẳng AB không song song cũng như không vuông góc với Oy. Dựng điểm C trên tia Ox sao cho tia Oy cắt các đoạn AC, CB tại các điểm tương ứng M, N tạo thành tam giác AMN cân tịa C.

Bài 20. Cho ΔABC biết A(1; 3), B(5; 1), C(−3; −1).

a. Tìm toạ độ điểm H là trực tâm ΔABC.

b. Tìm toạ độ điểm K đối xứng với H qua BC.

Bài 21. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A(1; 2) và B(3; 4) là nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 22. Cho ΔABC biết A(0; 3) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - y = 0$ và (d_C): $2x + y - 6 = 0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài 23. Cho ΔABC biết A(4; −1) và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $2x - 3y + 12 = 0$ và (d_C): $2x + 3y = 0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC.

Bài 24. Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng(d) qua đường thẳng (Δ), biết:

a. (d): $x + 2y - 13 = 0$ và (Δ): $2x - y - 1 = 0$.

b. (d): $x - 3y + 3 = 0$ và (Δ): $2x - 6y + 3 = 0$.

c. (d): $x - 3y + 6 = 0$ và (Δ): $2x - y - 3 = 0$.

Bài 25. Cho ΔABC biết phương trình cạnh (BC): $4x - y + 3 = 0$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_C): $x + y + 3 = 0$. Lập phương trình cạnh AB, AC.

Bài 26. Cho ΔABC biết phương trình cạnh (BC): $9x + 11y + 5 = 0$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình (d_B): $2x - 3y + 12 = 0$ và (d_C): $2x + 3y = 0$. Lập phương trình cạnh AB, AC.

Bài 27. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d), biết:

a. (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ và (d): $y - 3 = 0$.

b. (C): $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ và (d): $x - 2 = 0$.

Bài 28. Cho ΔABC biết B(1; 1), C(3; 2) và trực tâm H(2; 2). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 29. Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị (C) và đối xứng nhau qua (d), biết:

a. (C): $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ và (d): $y = x + 1$.

b. (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$ và (d): $y = x$.

Bài 30. Xác định m để đồ thị hàm số (C) có trục đối xứng song song với Oy, biết:

a. (C): $y = x^4 + 4mx^3 - 2x^2 - 12mx$.

b. (C): $y = x^4 + 4mx^3 - 2(m - 1)x^2 - 2mx + 1$.

CHỦ ĐỀ 4
PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Định nghĩa: *Phép đối xứng qua điểm O là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành M' đối xứng với M qua O, tức là* $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Kí hiệu $Đ_O$ hay S_O.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

3. TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình **H** nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình **H** thành chính nó, tức là $Đ_O$(**H**) = **H**.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép đối xứng tâm biến hình ($\mathbf{H_1}$) thành hình ($\mathbf{H_2}$).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

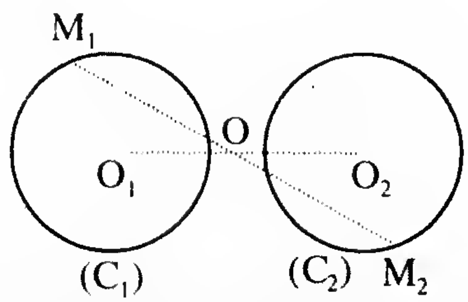
Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đối xứng tâm.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có tâm O_1, O_2 và đều có bán kính R. Tìm phép đối xứng tâm biến (C_1) thành (C_2).

Giải

Gọi O là trung điểm của O_1O_2.

Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua $Đ_O$, ta có:



$OM_1 = OM_2$,

$M\hat{O}O_1 = M\hat{O}O_2$ – đối đỉnh

$OO_1 = OO_1$,

$\Rightarrow \Delta M_1OO_1 = \Delta M_2OO_2$ (c.g.c)

$O_2M_2 = O_1M_1 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua $Đ_O$ – chứng minh tương tự ta được $M_1 \in (C_1)$.

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua $Đ_O$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

Giải

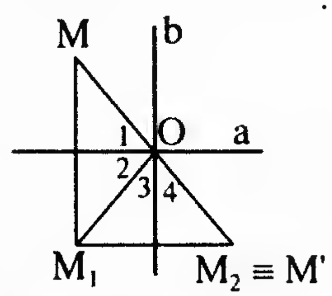
Gọi O là giao điểm của hai trục đối xứng a và b của hình (**H**).

Với điểm M bất kì thuộc (**H**), ta có:

$Đ_a(M) = M_1 \Rightarrow OM = OM_1$ và $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$,

$Đ_b(M_1) = M_2 \Rightarrow OM_1 = OM_2$ và $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$,

do đó:



$$\begin{cases} OM = OM_2 \\ M\hat{O}M_2 = 180^0 \end{cases} \Rightarrow M_2 = Đ_O(M).$$

Vậy, nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

Ví dụ 3: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

a. Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

b. Tìm quỹ tích điểm M_3.

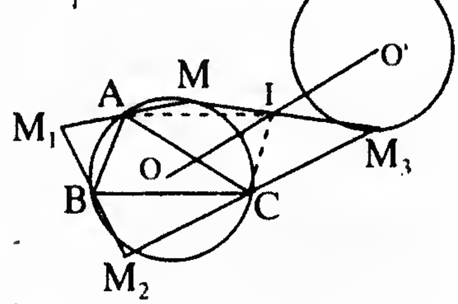
Giải

a. Gọi I là trung điểm MM_3, ta có:

ABCI là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ I cố định.

Vậy F là phép đối xứng tâm I.



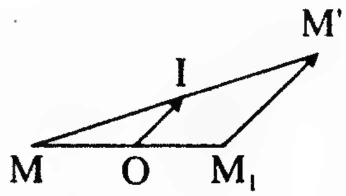
b. Vì:

$M_3 = Đ_I(M)$ và $M \in (O) \Rightarrow M_3 \in (O') = Đ_I((O))$.

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho vectơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M'.

a. F là phép hợp thành của hai phép nào ? F có phải là phép dời hình hay không ?

b. Chứng tỏ rằng F là một phép đối xứng tâm.



Giải

a. F là phép hợp thành của hai phép dời hình:

- Phép đối xứng tâm O, kí hiệu $Đ_O$.
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$.

Vì phép đối xứng và phép tịnh tiến đều bảo toàn khoảng cách nên F bảo toàn khoảng cách, do đó F là một phép dời hình.

b. Gọi I là trung điểm MM', ta có:

$$\overrightarrow{OI} \overset{//}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M'} = \frac{1}{2}\vec{u} \Rightarrow \text{I cố định.}$$

Vậy F là phép đối xứng tâm I.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với bài toán định tính, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép đối xứng tâm O, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh $M_2 = S_O(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = S_O(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng tâm để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép quay để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được các phép đối xứng tâm thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B (Hình sgk). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh rằng GOG' là tam giác vuông cân.

Giải

Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0, ta có ngay:

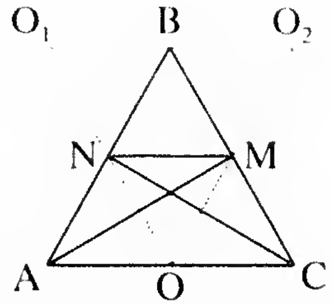
$$\Delta OBB' = Q_O^{90^0}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^0}(G) \Rightarrow \widehat{GOG'} = 90^0 \text{ và } OG' = OG.$$

Vậy, ta được $\Delta GOG'$ là tam giác vuông cân.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có AM và CN là các trung tuyến. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ thì ΔABC đều.

Giải

Tứ giác ACMN có $\widehat{NAM} = \widehat{MCN} = 30^0$ nên nội tiếp trong một đường tròn tâm O bán kính R và $\widehat{MON} = 2\widehat{NAM} = 60^0$.



Xét các phép đối xứng tâm N và tâm M.

$S_{(N)}$: $A \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_1) \Rightarrow B \in (O_1)$ vì $A \in (O)$.

$S_{(M)}$: $C \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_2) \Rightarrow B \in (O_2)$ vì $C \in (O)$

Trong ΔOO_1O_2, ta có nhận xét:

$OO_1 = OO_2 = 2R$,

$\widehat{MON} = 2\widehat{BAM} = 60^0$,

suy ra ΔOO_1O_2 là tam giác đều.

Mặt khác:

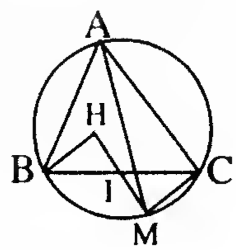
$O_1B + O_2B = R + R = 2R = O_1O_2$ nên B là trung điểm của O_1O_2.

Từ đó suy ra hai ΔABC và ΔOO_1O_2 đồng dạng (vì cùng đồng dạng với ΔBMN) và vì ΔOO_1O_2 đều nên ΔABC đều.

Ví dụ 1: Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn (O ; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

Gọi I là trung điểm BC và vẽ đường kính AM.



Ta có:

$BH \perp AC$ và $MC \perp AC \Rightarrow BH \,//\, MC$. (1)

$CH \perp AB$ và $MB \perp AB \Rightarrow CH \,//\, MB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

BHCM là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm HM.

Vậy, trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định $(O'; R) = Đ_I((O; R))$.

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng tâm S_O, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép đối xứng tâm S_O.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm M chạy trên (O ; R).

Giải – Bạn đọc tự vẽ hình

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Do đó, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành M'.

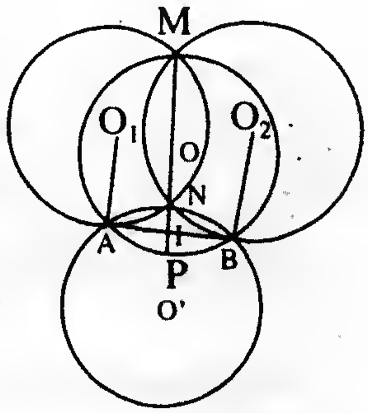
Vậy khi M chạy trên đường tròn (O ; R) thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$.

Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn (O ; R).

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn (O_1), (O_2) qua M, theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Gọi N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

b. Tìm tập hợp N khi M di động trên (O).



Giải

a. Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$$IA^2 = \overline{IM}.\overline{IN} = IB^2 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ IA = IB, do đó I là trung điểm AB.

Vậy đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định I là trung điểm AB.

b. Gọi P là điểm chung thứ hai của MN và (O), ta có:

$$\overline{IP}.\overline{IM} = \overline{IA}.\overline{IB} = -IA^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{IP}.\overline{IM} = -\overline{IM}.\overline{IN} \Rightarrow \overline{IP} = -\overline{IN} \Rightarrow N = S_{(I)}(P)$$

Vì tập hợp các điểm P là đường tròn (O) qua hai điểm A và B nên tập hợp các điểm N là đường tròn (O') bỏ đi hai điểm A và B với $(O') = S_{(I)}(O)$

Bài toán 4: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

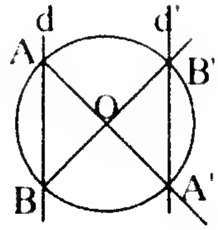
Ví dụ 1: Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Giải

a. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$$A' = Đ_O(A) \text{ và } B' = Đ_O(B).$$

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.



b. Có thể thực hiện được, cụ thể:

- Lấy điểm A trên d, dùng thước thẳng dựng tia AO.
- Dùng compa dựng đường tròn (O; OA), đường tròn này cắt đường thẳng d tại B và tia AO tại A'.
- Dùng thước thẳng dựng tia BO cắt đường tròn tại B'.
- Dùng thước thẳng nối A' với B' ta được đường thẳng d' cần dựng.

<u>Ví dụ 2:</u> Cho hai đường tròn (O ; R) và (O_1 ; R_1) cắt nhau tại hai điểm A, B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A cắt (O ; R) và (O_1 ; R_1) lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1.

Giải – Bạn đọc tự vẽ hình

Giả sử ta dã dựng dược dường thẳng d thoả mãn yêu cầu bài toán. Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng qua A thì $Đ_A$ biến diểm M thành diểm M_1 và biến đường tròn (O ; R) thành đường tròn (O' ; R).

Vì M nằm trên (O ; R) nên M_1 nằm trên (O' ; R).

Mặt khác, M_1 lại nằm trên (O_1 ; R_1) nên M_1 là giao diểm khác A của hai đường tròn (O' ; R) và (O_1 ; R_1).

Từ đó, suy ra cách dựng:

- Dựng đường tròn (O' ; R) dối xứng với (O ; R) qua A (O' là diểm đối xứng với O qua A).
- Lấy giao diểm M_1 của hai dường tròn (O' ; R) và (O_1 ; R_1), M_1 khác A.
- Đường thẳng d là đường thẳng di qua A và M_1.

<u>Ví dụ 3:</u> Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), hai diểm A, G không thuộc (d_1), (d_2). Hãy dựng ΔABC có trọng tâm G và hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1) và (d_2).

Giải

Phân tích: Giả sử dã dựng dược ΔABC có trọng tâm G, hai dỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1), (d_2). Gọi M là trung điểm cạnh BC thì M dược xác dịnh bởi:

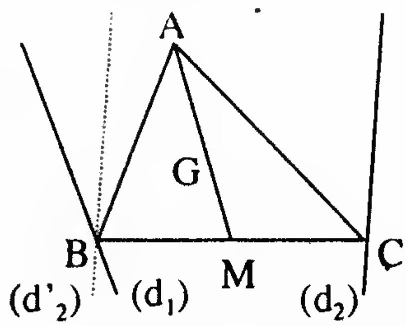
$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

Thực hiện phép đối xứng tâm M:

$S_{(M)}$: $C \mapsto B$, $(d_2) \mapsto (d'_2)$.

Ta có $B \in (d'_2)$.

Vậy B là giao diểm của (d'_2) và (d_1).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.
- Dựng đường thẳng (d'_2) với (d'_2) = $S_{(M)}[(d_2)]$ và giả sử (d'_2) cắt (d_1) tại B
- Dựng điểm C với C = $S_{(M)}(B)$

thì ΔABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh: Dựa vào cách dựng ta có:

- $B \in (d_1)$, $B \in (d'_2)$;
- $S_{(M)}[(d'_2)] = (d'_2)$ và $C = S_{(M)}(B) \Rightarrow C \in (d_2)$
- M là trung điểm cạnh BC và $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow$ G là trọng tâm ΔABC.

Biện luận: Số nghiệm hình của bài toán bằng số điểm chung của (d_1) và (d'_2).

Bài toán 5: Hệ toạ độ đối với phép đối xứng tâm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Trong phần này chúng ta xem xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toán tổng quát.

Dạng 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua điểm I(a, b).

Ta có ngay I là trung điểm MM_1, do đó:

$$\begin{cases} x_M + x_{M_1} = 2a \\ y_M + y_{M_1} = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2a - x_M \\ y_{M_1} = 2b - y_M \end{cases}.$$

Đặc biệt: Nếu $I \equiv O(0; 0)$ thì với M(x, y) suy ra $M_1(x_1, y_1)$.

Dạng 2: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) : Ax + By + C = 0 qua I(a, b).

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với mỗi đểm $M(x, y) \in (d)$, suy ra tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1) \in (d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2a \\ y + y_1 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x_1 \\ y = 2b - y_1 \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Bước 2: Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$Ax_1 + By_1 - C - 2aA - 2bB = 0. \quad (1)$$

Bước 3: Viết lại (1) dưới dạng:

$$Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0. \quad (2)$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua I.

Bước 2: Vì $(d_1) // (d)$: Ax + By + C = 0 suy ra

(d): Ax + By + $\underline{D}$ = 0.

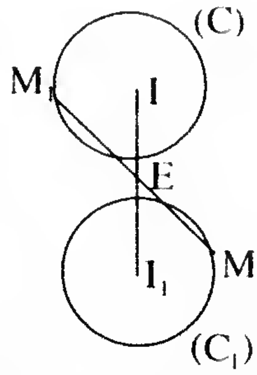
Bước 3: Vì $A_1 \in (d_1) \Rightarrow$ giá trị của D,

Từ đó có được phương trình của (d_1).

Dạng 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C): $f(x, y) = 0$ qua điểm $E(x_0, y_0)$ ($E \neq I$ là tâm của (C)).

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Với mỗi $M(x, y) \in (C_1)$ thì $\exists M_1(x_1, y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua $E(x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2x_0 \\ y_1 + y = 2y_0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

Cách 2: Chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C). Khi đó E là trung điểm II_1 $\Rightarrow$ toạ độ điểm I_1.

Bước 2: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tam } I_1 \\ \text{bkinh } R \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0; y_0)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình của Δ'.

Giải

Với mỗi điểm $M(x_0; y_0) \in (\Delta)$ (tức là $Ax_0 + By_0 + C = 0$), suy ra tồn tại điểm $M'(x; y) \in (\Delta')$ sao cho:

$$\begin{cases} x = 2a - x_0 \\ y = 2b - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2a - x \\ y_0 = 2b - y \end{cases}.$$

Do đó, đường thẳng (Δ') sẽ có phương trình:

(Δ'): $A(2a - x) + B(2b - y) + C = 0$

$\Leftrightarrow (\Delta')$: $Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD biết phương trình cạnh (AB): $2x - y = 0$, (AD): $4x - 3y = 0$ và tâm I(2; 2). Lập phương trình các cạnh BC và CD.

Giải

- Cạnh BC đối xứng với AD qua I, ta lần lượt thực hiện :

Với mỗi đểm $M(x, y) \in (AD) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_1(x_1, y_1) \in (d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 4 \\ y + y_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - x_1 \\ y = 4 - y_1 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Thay (I) vào phương trình của (AD), ta được:

$$4(4 - x_1) - 3(4 - y_1) = 0 \Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 - 4 = 0. \quad (1)$$

Viết lại (1) dưới dạng:

$$4x - 3y - 4 = 0. \quad (2)$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (BC).

- Cạnh CD đối xứng với AB qua I, ta lần lượt thực hiện :

Lấy điểm $O(0; 0) \in (AB)$, gọi O_1 là điểm đối xứng với O qua I, suy ra $O_1(4; 4)$.

- Vì $(CD)//(AB)$: $2x - y = 0 \Rightarrow (CD)$: $2x - y + C = 0$.
- Vì $O_1 \in (CD) \Rightarrow C = -4$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_1): $2x - y - 4 = 0$.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E(1; 2).

Giải

Cách 1: Với mỗi $M(x; y) \in (C_1)$

$\Leftrightarrow \exists M_1(x_1; y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua E

$\Leftrightarrow \exists\ x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases}(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2\\ x_1 + x = 2\\ y_1 + y = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2\\ x_1 = 2 - x\\ y_1 = 4 - y\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

Vậy phương trình đường tròn (C_1): $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Cách 2: Xét đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi I_1 là tâm đường tròn (C_1).

Vì (C) và (C_1) đối xứng qua điểm E $\Rightarrow$ E là trung điểm II_1, do đó $I_1(0; 3)$.

Phương trình đường tròn (C_1) được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases}\text{tam } I_1(0,3)\\ \text{bkinh } R = \sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow (C_1): x^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

Chú ý: Cho hàm số:

$$y = f(x).$$

1. Để chứng minh đồ thị hàm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases}X = x - a\\ Y = y - b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = X + a\\ y = Y + b\end{cases}$$

hàm số có dạng :

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \quad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số lẻ.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng.

2. Để tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số nhận điểm I(a, b) làm tâm đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Thực hiện phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

hàm số có dạng :

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (1)$$

Bước 2: Đồ thị hàm số nhận I(a, b) làm tâm đối xứng

$\Leftrightarrow$ hàm số (1) là hàm số lẻ $\Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 4: Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(1; −1) làm tâm đối xứng.

Giải

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng :

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X. \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(1; −1) làm tâm đối xứng.

Chú ý : Đồ thị hàm số bậc ba

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

luôn nhận điểm $U\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 1) làm tâm đối xứng.

Giải

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng :

$$Y + 1 = \frac{(X+1)+1}{(X+1)-1} \Leftrightarrow Y = \frac{(X+1)+1}{(X+1)-1} - 1 \Leftrightarrow Y = \frac{2}{X}. \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(1, 1) làm tâm đối xứng.

Chú ý : Đồ thị hàm số :

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ với } c \neq 0, D = ad - bc \neq 0$$

luôn nhận điểm $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 2}.$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(2; 2) làm tâm đối xứng.

Giải

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng :

$$Y + 2 = \frac{(X+2)^2 - 2(X+2) - 2}{(X+2) - 2} \Leftrightarrow Y = \frac{X^2 + 2X - 2}{X} - 2$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{X^2 - 2}{X}. \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(2; 2) làm tâm đối xứng.

Chú ý : Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$, với $d \neq 0$ luôn nhận điểm $I\left(-\frac{e}{d}, \frac{b}{d} - \frac{2ac}{d^2}\right)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 7: Xác định m để đồ thị hàm số (C) nhận điểm I(1; 0) làm tâm đối xứng, biết:

$$(C): y = -\frac{1}{m}x^3 + 3mx^2 - 2.$$

Giải

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng :

$$Y = -\frac{1}{m}(X+1)^3 + 3m(X+1)^2 - 2.$$

$$= -\frac{1}{m}X^3 + 3\left(m - \frac{1}{m}\right)X^2 + 3\left(2m - \frac{1}{m}\right)X + 3m - \frac{1}{m} - 2. \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(m - \dfrac{1}{m}\right) = 0 \\ 3m - \dfrac{1}{m} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 0) là tâm đối xứng.

Ví dụ 8: Cho hàm số:

$$y = \frac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x - 2}.$$

Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm I(2; 1) làm tâm đối xứng.

Giải

Điểm I(2, 1) là tâm đối xứng của đồ thị khi với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

hàm số sau là hàm lẻ

$$Y + 1 = \frac{2(X+2)^2 + (m-4)(X+2) - 2m + 1}{(X+2) - 2}.$$

Xét hàm số :

$$Y = \frac{2(X+2)^2 + (m-4)(X+2) - 2m + 1}{(X+2) - 2} - 1 = \frac{2X^2 + (m+4)X + 1}{X}. \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm lẻ khi và chỉ khi $m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Vậy, với m = −4 đồ thị hàm số nhận I(2, 1) làm tâm đối xứng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây:

a. Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau.

b. Hình gồm hai đường thẳng song song.

c. Hình gồm hai đường tròn bằng nhau.

d. Đường elip.

e. Đường Hypecbol.

Bài 2. Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.Chứng minh:

a Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d'.

b Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Bài 3. Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 4. Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn (O ; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 5. Cho đường tròn (O) với ba dây AB, MN, PQ cắt nhau tại I sao cho IA = IB và M, P nằm cùng phía với AB. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB với PN. Chứng minh rằng IE = IF.

Bài 6. Cho ΔABC có H là trực tâm; M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi H_1, H_2, H_3 là điểm đối xứng của H qua M, N, P theo thứ tự đó. Chứng minh rằng H_1, H_2, H_3 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC.

Bài 7. Cho ΔABC có đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1 và A_2; B_1 và B_2; C_1 và C_2. Chứng minh rằng: nếu đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_1, B_1, C_1 đồng quy thì các đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_2, B_2, C_2 đồng quy.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Vẽ các tia Ax, Ay trong góc A sao cho $B\hat{A}x = C\hat{A}y$, vẽ các tia Bz, Bt trong góc B sao cho $A\hat{B}z = C\hat{B}t$. Gọi E là giao điểm của Ax và Bz, F là giao điểm Ay và Bt. Chứng minh rằng $A\hat{C}E = B\hat{C}F$

Bài 9. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) dựng hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là tiếp điểm). Tại một điểm M tùy ý của (O) dựng tiếp tuyến thứ ba, cắt AB và AC lần lượt tại D, E. Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDOE khi M di động trên (O).

Bài 10. Cho ΔABC. Ba trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G.

a. Dựng ảnh $A_2B_2C_2$ của ΔABC qua $Đ_G$.

b. Chứng minh hai tam giác ΔABC và $\Delta A_2B_2C_2$ đồng dạng. Xác định tỉ số đồng dạng.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD với giao điểm O của hai đường chéo. Xác định ảnh của hình bình hành này qua phép đối xứng tâm O.

Bài 12. Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 13. Cho đường tròn (O), đường thẳng (d) và điểm A không phụ thuộc đường thẳng (d) và đường tròn (O). Dựng điểm B thuộc đường tròn (O) và điểm C thuộc (d) sao cho A là trung điểm BC.

Bài 14. Cho tứ giác ABCD và điểm O nằm trong tứ giác. Hãy dựng hình bình hành có tâm là O và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh kéo dài của tứ giác.

Bài 15. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và một điểm I. Hãy tìm trên mỗi đường hai điểm sao cho bốn điểm phải tìm là bốn đỉnh của một hình bình hành có tâm là I.

Bài 16. Cho hình vuông ABCD và một điểm K nằm bên trong không trùng với tâm cua hình vuông. Dựng qua K một đường thẳng sao cho nó cắt hình vuông thành hai phần có hiệu diện tích lớn nhất.

Bài 17. Cho ΔABC. Dựng đường thẳng (d) qua A sao cho với mọi điểm M thuộc (d), ta luôn có chu vi ΔMBC lớn hơn hoặc bằng chu vi ΔABC.

Bài 18. Cho góc nhọn xOy và hai điểm A, B ở trong góc đó. Hãy dựng các điểm C và D lần lượt trên Ox, Oy sao cho đường gấp khúc ABCD có độ dài lớn nhất.

Bài 19. Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua điểm I, biết:

a. (d): $2x - y + 4 = 0$ qua điểm $I(-2; 1)$.

b. (d): $x - 2y - 5 = 0$ qua điểm $I(2; 1)$.

c. (d): $x - 2y + 2 = 0$ qua điểm $I(1; 1)$.

Bài 20. Cho hình bình hành ABCD biết phương trình các cạnh (AB): $x + 2y - 7 = 0$, (AD): $x - y + 2 = 0$ và tâm $I(1; 1)$. Lập phương trình các cạnh BC và CD.

Bài 21. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E, biết:

a. (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và $E(2; -3)$.

b. (C): $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ và $E(-1; 2)$.

Bài 22. Cho hàm số :

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ với } c \neq 0, D = ad - bc \neq 0.$$

Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

Bài 23. Cho hàm số:

$$y = \frac{x^2 - mx + m - 1}{x - 2}.$$

Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm $I(2; 3)$ làm tâm đối xứng.

CHỦ ĐỀ 5

PHÉP QUAY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP QUAY

Định nghĩa: *Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* OM = OM' *và* (OM, OM') = α *được gọi là phép quay tâm O với góc quay α.*

Kí hiệu Q_O^α hay $Q_{(O, \alpha)}$.

Định lí: *Phép quay là một phép dời hình.*

Biểu thức toạ độ của phép quay: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép quay biến hình $(\mathbf{H_1})$ thành hình $(\mathbf{H_2})$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép quay (phép đối xứng tâm).

__Ví dụ 1:__ Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' như hình vẽ. Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'.

a. Tìm phép quay Q biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

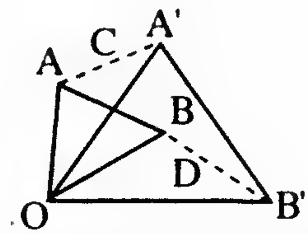
b. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều

Giải

Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ rằng Q biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

Do đó OC = OD và $\widehat{COD} = 60^0$.

Vậy, ta được ΔOCD đều.



Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với bài toán định tính, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép quay tâm O với góc quay α, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh $M_2 = Q_O^\alpha(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = Q_O^\alpha(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép quay để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép quay để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được các phép quay thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

__Ví dụ 1:__ Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B (hình bên). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh rằng GOG' là tam giác vuông cân.

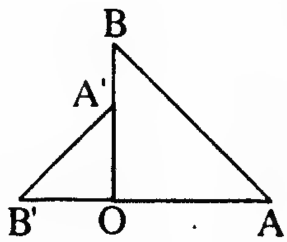
Giải

Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0, ta có ngay:

$\Delta OBB' = Q_O^{90^0}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^0}(G)$

$\Rightarrow \widehat{GOG'} = 90^0$ và OG' = OG.

Vậy, ta được ΔGOG' là tam giác vuông cân.

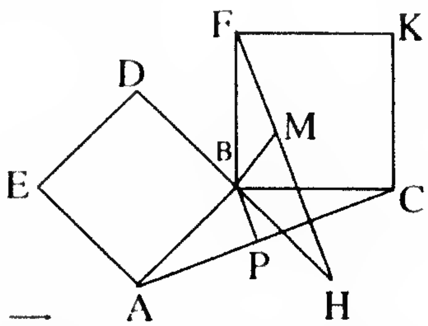


Ví dụ 2: Cho ΔABC có các đỉnh được kí hiệu theo hướng âm, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm đoạn FH.

a. Xác định ảnh của hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay tâm B, góc 90^0.

b. Chứng minh rằng DF = 2BP và DF vuông góc với BP.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BA = BH \text{ (cùng bằng BD)} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}) = 90^0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_B^{90^0}(A) = H \;\&\; Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BH}$$

Vì $Q_B^{90^0}(A) = H$, $Q_B^{90^0}(C) = F$ nên $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$

b. Vì P là trung điểm của AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay trên trung ddiểm M của HF.

Do đó:

$$Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}.$$

Mặt khác:

$$BM = \frac{1}{2}DE \text{ và } BM \,//\, DF \Rightarrow BP = \frac{1}{2}DF \text{ và } DF \perp BP.$$

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép quay Q_O^α, biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép quay Q_O^α.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R), A là một điểm cố định không trùng với tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120^0. Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J.

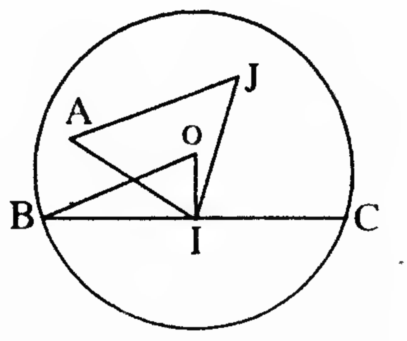
Giải

Ta có I là trung điểm của BC và cung BC = 120^0.

Nên $OI \perp BC$ và $\widehat{BOI} = 60^0$.

Trong ΔOIB:

$$OI = OB\cos\widehat{BOI} = R\cos 60^0 = \frac{R}{2}.$$



Do đó tập hợp các điểm I là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\frac{R}{2}$.

Mặt khác, ΔAIJ đều nên ta có:

$$\begin{cases} AJ = AI \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow J = Q_A^{60^0}[(\gamma)]$$

Mà tập hợp các điểm I là đường tròn (γ) nên tập hợp các điểm J là hai đường tròn (γ_1) và (γ_2) với

$$(\gamma_1) = Q_A^{60^0}[(\gamma)]$$

$$(\gamma_2) = Q_A^{60^0}[(\gamma)]$$

(γ_1) là đường tròn tâm (O_1), bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_1 = Q_A^{60^0}(O)$.

(γ_2) là đường tròn tâm (O_2), bán kính $\frac{R}{2}$ với $O_2 = Q_A^{-60^0}(O)$.

Bài toán 4: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.

Giải

Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$$A' = Q_O(A) \text{ và } B' = Q_O(B).$$

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.

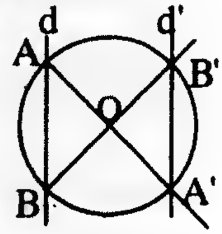
<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Giải

a. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$$A' = Đ_O(A) \text{ và } B' = Đ_O(B).$$

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.



b. Có thể thực hiện được, cụ thể:

- Lấy điểm A trên d, dùng thước thẳng dựng tia AO.
- Dùng compa dựng đường tròn (O; OA), đường tròn này cắt đường thẳng d tại B và tia AO tại A'.
- Dùng thước thẳng dựng tia BO cắt đường tròn tại B'.
- Dùng thước thẳng nối A' với B' ta được đường thẳng d' cần dựng.

<u>**Ví dụ 3:**</u> Cho hai đường thẳng (d) và (d') song song và một điểm A không ở trên (d) và (d'). Hãy dựng điểm B trên (d) và điểm C trên (d') sao cho ABC là tam giác đều, có các đỉnh được kí hiệu theo hướng dương.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC theo hướng dương. thực hiện phép quay tâm A, góc 60^0.

$$Q_A^{60^0}: B \mapsto C$$
$$(d) \mapsto (d_1)$$

Vì $B \in (d)$ nên $C \in (d_1)$.

Vậy C là điểm chung của (d_1) và (d'). ta cũng có $B = Q_A^{-60^0}(C)$.

Cách dựng: Ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng (d_1) với $(d_1) = Q_A^{60^0}$ thì (d_1) là đường thẳng qua K và vuông góc với AK.
- (d_1) cắt (d') tại C
- Dựng điểm B với $B = Q_A^{-60^0}(C)$. Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

- $B \in (d)$, $C \in (d')$
- $AC = AB$ và $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -60^0 \Rightarrow$ ABC là tam giác đều và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$.

Biện luận: Vì (d) // (d') nên ta luôn có một và chỉ một điểm chung C của (d_1) và (d'). Do đó bài toán có một nghệm hình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông ABDE và ACFH. Gọi I là trung điểm của cạnh BCE.

a. Chứng minh rằng AE = CD.

b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AE và CD. CMR ΔBIJ là một tam giác đều.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC; P và Q là hai điểm di động lần lượt ở trên cạnh AB và AC sao cho AP = CQ

a. Xác định tâm và góc của phép quay biến $\overrightarrow{AP}$ thành $\overrightarrow{CQ}$.

b. Chứng minh rằng đường tròn (APQ) qua một điểm cố định khác A.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC và I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}.\sin A + \overrightarrow{IB}.\sin B + \overrightarrow{IC}.\sin C = \vec{0}$

Bài tập 4: Qua điểm K lấy trong hình vuông ABCD vạ đường thẳng cắt các cạnh AB, CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của đường tròn qua K, P, B với đường tròn qua K, Q, D nằm trên đường chéo BD.

Bài tập 5: Cho đoạn thẳng AC và một điểm B ở trong đoạn đó. Dựng về cùng một phía của đường thẳng AC hai tam giác đều ABE và CBF. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh rằng BMN là tam giác đều.

Bài tập 6: Cho hai đường tròn (O_1,R) và (O_2, R); M là điểm di động trên (O_1,R), N là điểm di động (O_2,R) sao cho $(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2N})$ có số đo không đổi. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn MN luôn qua một điểm cố định.

Bài tập 7: Cho tam giác ABC, dựng ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABC_1, ACB_1, ECA_1. Chứng minh rằng:

a. $AA_1 = BB_1 = CC_1$

b. $AA_1 = BB_1 = CC_1$ đồng quy tại điểm O

c. Đối với ΔABC nhọn, điểm O nằm trong tam giác và $OA_1 = OB + OC$.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC, dựng ở ngoài tam giác ấy các tam giác vuông cân IAB, KAC ($\hat{I} = \hat{K} = 90^0$), dựng hình bình hành IBCM. Trên tia đối của tia AI lấy điểm N sao cho AN = AI. Chứng minh rằng tam giác KMN vuông cân.

Bài tập 9: Cho đường thẳng (Δ) và một điểm A cố định không ở trên (Δ). M là một điểm di động trên (Δ). Vẽ tam giác AMN vuông vân tại A. Tìm tập hợp điểm N.

Bài tập 10: Trên đường tròn (O), cho hai điểm A và B cố định. Gọi M là một điểm di động trên cung lớn AB. Trên tia BM, Lấy điểm N sao cho BN = AM

a. Gọi I là trung điểm cảu cụng lớn AB. CMR: IM = IN

b. Chứng minh rằng điểm N là ảnh của điểm M trong một phép quay xác định. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên cung lưon AB

Bài tập 11: Cho hai trục vuông góc Ox và Oy và một độ dài a. Trên Ox lấy một điểm cố định A và một điểm di động M, trên Oy lấy một điểm cố định B và một điểm di động N sao cho $\overline{OA} = \overline{OB} = a$ và $\overline{OM} + \overline{ON} = 2a$

a. Chứng minh AM = BN

b. Chứng minh rằng đường trung trực cảu đoạn MN qua một điểm cố định E. Tam giác EMN có đặc tính gì?

c. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN.

Bài tập 12: Dựng ΔABC vuông cân ($\hat{A} = 1v$) cho trước đỉnh A còn hai đỉnh B, C theo thứ tự ở trên:

a. Hai đường d_1, d_2 cho trước.

b. Hai đường tròn (O_1), (O_2) cho trước.

Bài tập 13: Cho ΔABC có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$. Hãy dựng điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho BM = CN và BC = 2MN.

Bài tập 14: Dựng tam giác đều biết ba đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành cho trước.

Bài tập 15: Cho ΔABC có các góc đều nhọn. Hãy dựng một điểm M sao cho tổng khoảng cách MA + MB + mặt cầu là nhỏ nhất.

CHỦ ĐỀ 6
HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: *Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

Định lí: *Nếu hình* $(\mathbf{H_1})$ *bằng hình* $(\mathbf{H_2})$ *và hình* $(\mathbf{H_2})$ *bằng hình* $(\mathbf{H_3})$ *thì hình* $(\mathbf{H_1})$ *bằng hình* $(\mathbf{H_3})$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

> **Bài toán 1:** Chứng tỏ rằng nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

CHỨNG MINH

Gọi F là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu $\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$ $(p, q \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}$. Ta đi chứng minh F là một phép dời hình cần tìm.

Thật vậy, với điểm N và F biến N thành N', tức là nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}$ $(k, l \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}$.

Khi đó, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}) - (p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB})$$

$$= (k - p)\overrightarrow{CA} + (l - q)\overrightarrow{CB}$$

$$MN^2 = (\overrightarrow{MN})^2 = [(k - p)\overrightarrow{CA} + (l - q)\overrightarrow{CB}]^2$$

$$= (k - p)CA^2 + (l - q)^2CB^2 + 2(k - p)(l - q)\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{C'N'} - \overrightarrow{C'M'} = (k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}) - (p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'})$$

$$= (k - p)\overrightarrow{C'A'} + (l - q)\overrightarrow{C'B'}$$

$$(M'N')^2 = (\overrightarrow{M'N'})^2 = [(k - p)\overrightarrow{C'A'} + (l - q)\overrightarrow{C'B'}]^2$$

$$= (k - p)C'A'^2 + (l - q)^2C'B'^2 + 2(k - p)(l - q)\overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}. \quad (2)$$

Với giả thiết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (nên $CA = C'A'$, $CB = C'B'$ và $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}$) nên từ (1) và (2) suy ra:

$MN = M'N' \Leftrightarrow$ F là một phép dời hình.

Mặt khác, ta nhận thấy phép dời hình F biến A, B, C lần lượt thành A', B', C', tức là biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

Bài toán 2: Chứng minh hai hình bằng nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh hình (H_1) bằng hình (H_2), ta thường lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*): Tìm một phép biến hình biến (H_1) thành hình (H_2) hoặc ngược lại.

Cách 2: (*Sử dụng định lí*): Tìm một hình (H) rồi khẳng định:

$$(H) = (H_1) \text{ và } (H) = (H_2) \Rightarrow (H_1) = (H_2).$$

Ví dụ 1:

a. Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

b. Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c. Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không ?

Giải

a. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử AC = A'C', ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

$A'B'C'D' = f(ABCD) \Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

b. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử $\hat{A} = \hat{A}'$, ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

$A'B'C'D' = f(ABCD) \Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

c. Không thể, bởi hình thoi ABCD cạnh a không thể bằng hình vuông A'B'C'D' cạnh a.

Ví dụ 2: Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước thì bằng nhau.

Giải

Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B' và BC = B'C'.

Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D'.

Ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

$A'B'C'D' = f(ABCD) \Rightarrow$ hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

Ví dụ 3: Hình H_1 gồm ba đường tròn $(O_1 ; r_1)$, $(O_2 ; r_2)$, $(O_3 ; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình H_2 gồm ba đường tròn $(I_1 ; r_1)$, $(I_2 ; r_2)$, $(I_3 ; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình H_1 và H_2 bằng nhau.

Giải

Xét hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$, ta có:

$O_1O_2 = r_1 + r_2 = I_1I_2$,

$O_2O_3 = r_2 + r_3 = I_2I_3$,

$O_3O_1 = r_3 + r_1 = I_3I_1$,

suy ra:

$\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta O_1O_2O_3 = f(\Delta I_1I_2I_3) \Rightarrow (\mathbf{H_1}) = f(\mathbf{H_2})$

Vậy, hai hình $\mathbf{H_1}$ và $\mathbf{H_2}$ bằng nhau.

Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Giải

Đó chính là đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = ax^2$ và $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.

Giải

Viết lại phương trình parabol (P') dưới dạng:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Như vậy, tồn tại phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ để (P') = T(P).

Vậy, hai parabol (P) và (P') bằng nhau.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Theo định nghĩa tổng quát về sự bằng nhau của hai hình, hãy chứng minh rằng:

a. Hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.

b. Hai góc có cùng số đo thì bằng nhau.

c. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau thì bằng nhau.

Bài 2. Cho hai hình bình hành. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành sẽ chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.
Bài 3. Đa giác lồi n cạnh gọi là n–giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.
Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ và $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$. Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.
Bài 5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ và $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.
Bài 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ và $y = g(x) = \frac{x^2 + 17x + 70}{x+6}$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.

CHỦ ĐỀ 7
PHÉP VỊ TỰ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Cho một điểm O cố định và một số k không đổi $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.*

Ký hiệu là V_O^k hoặc $V_{(O,\,k)}$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 1: *Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì:*

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Định lí 2: *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.*

Hệ quả: Phép vị tự vị tự tỉ số k:

- *Biến đường thẳng thàng đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó.*
- *Biến tia thành tia.*
- *Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với $|k|$.*
- *Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.*
- *Biến góc thành góc bằng nó.*

3. ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

***Định lí 3**: Phép vị tự tỉ số* k *biến đường tròn bán kính* R *thành đường tròn có bán kính* $|k|R$.

4. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho hai đường tròn $(I_1; R_1)$ và $(I_2; R_2)$ với $R_1 \neq R_2$. Có hai phép vị tự $V_{O_1}^k$ và $V_{O_2}^k$ biến $(I_1; R_1)$ thành $(I_2; R_2)$.

Hai tâm vị tự O_1, O_2 và tỉ số k được xác định như sau:

- $k = \pm\dfrac{R_1}{R_2}$ (k > 0 thì gọi là tâm vị tự ngoài, k < 0 thì gọi là tâm vị tự trong).
- O_1, O_2 ở trên đường thẳng I_1I_2 và $\dfrac{\overrightarrow{O_1I_2}}{\overrightarrow{O_1I_1}} = \dfrac{\overrightarrow{O_2I_2}}{\overrightarrow{O_2I_1}} = k$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép vị tự biến hình $(\mathbf{H_1})$ thành $(\mathbf{H_2})$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

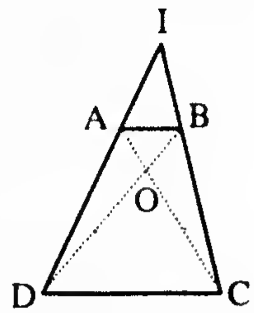
Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

Ví dụ 1: Các phép sau đây có phải là phép vị tự không: Phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

Giải

a. Phép đối xứng tâm có là phép vị tự.
b. Phép đối xứng trục không là phép vị tự.
c. Phép đồng nhất có là phép vị tự.
d. Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không là phép vị tự.

Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD có các đáy CD = 3AB. Hãy xác định các phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{DC}$; biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$.



Giải

a. Gọi I là giao điểm của AD và BC, khi đó:

$$V_I^3(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC}.$$

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó:

$$V_O^{-3}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}.$$

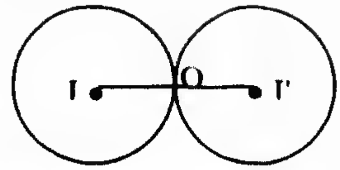
Ví dụ 3: Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

a. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.
b. Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
c. Một đường tròn chứa đường tròn kia.

Giải

a. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc ngoài với nhau, ta xét:

Trường hợp 1: Nếu R = R' thì $k = \pm 1$.

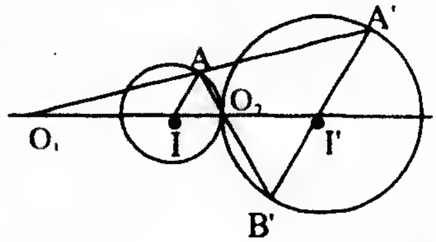


Khi đó, tâm vị tự O thoả mãn:

$\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ k chỉ có thể bằng -1

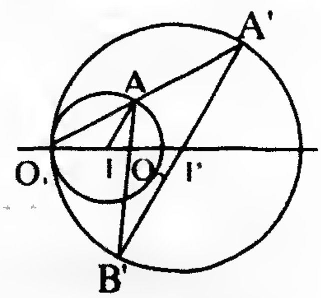
$\Rightarrow$ O (tâm vị tự trong) là trung điểm của II' (chính là tiếp điểm của hai đường tròn)

Trường hợp 2: Nếu $R \neq R'$ thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:



- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong và O_2 trùng với tiếp điểm).

b. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc trong với nhau ($R \neq R'$), ta có thể xác định các phép vị tự sau:

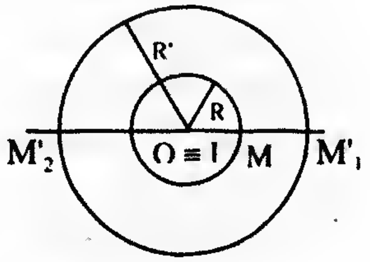


- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

c. Đường tròn (I; R) nằm trong đường tròn (I'; R'), ta xét:

Trường hợp 1: Nếu $I \equiv I'$ thì khi đó tâm vị tự O trùng với điểm I.

Vậy, ta có hai phép vị tự:



- Phép vị tự $V_1(I; k_1)$ với $k_1 = \dfrac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_1).
- Phép vị tự $V_2(I; k_2)$ với $k_2 = -\dfrac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_2).

Trường hợp 2: Nếu I không trùng với I' thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

<u>**Ví dụ 4:**</u> Gọi F là phép biến hình có tính chất sau: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tính tiến hoặc phép vị tự.

Giải

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu k = 1 thì:

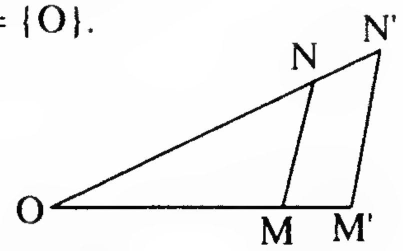
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow MNN'M \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$$

suy ra M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

Vậy, trong trường hợp này F là một phép tịnh tiến.

Trường hợp 1: Nếu $k \neq 1$ thì từ đẳng thức $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ suy ra:

MN // M'N' và MN ≠ M'N' nên $MM' \cap NN' = \{O\}$.



Từ đó, ta nhận được:

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{MM'}{NN'} = k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \text{ và } \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$$

suy ra M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N trong phép vị tự tâm O tỉ số k.

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với bài toán định tính, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép vị tự V_O^k, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh $M_2 = V_O^k(M_1) \in (\mathbf{H_2})$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh $M_1 = V_O^k(M_2) \in (\mathbf{H_1})$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép vị tự để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép vị tự để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được các phép vị tự thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

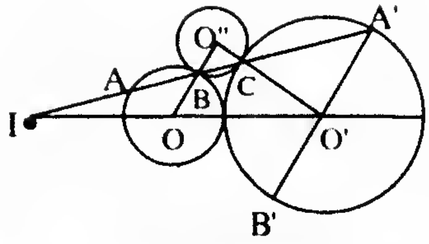
Giải

Giả sử đường thẳng BC cắt (O), (O') và OO' theo thứ tự tại A, A' và I.

Vì C tâm tỉ cự trong của (O') và (O") nên:

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{R'}{R''} = \frac{CO'}{CO''} \Rightarrow O'A' \,//\, BO''$$

$$\Leftrightarrow O'A' \,//\, OB \Rightarrow \frac{IB}{IA'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$



$\Rightarrow$ I là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

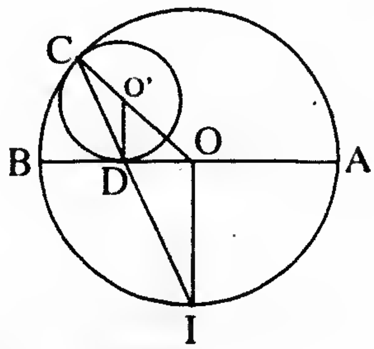
Vậy, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với (O) và đoạn AB lần lượt tại C, D, cắt đường thẳng CD tại (O; R) tại I. Tính độ dài các đoạn thẳng AI và BI.

Giải

Ta có:

- C là tâm vị tự dương của hai đường tròn (O) và (O').
- $D \in (O')$, $I \in (O)$ và ba điểm C, D, I thẳng hàng.



Do đó thực hiện phép vị tự tâm C, tỉ số $\frac{R'}{R}$ (với R' là bán kính của (O')), ta có:

$$H_C^{\frac{R'}{R}} : O \mapsto O', I \mapsto D \Rightarrow OI \,//\, O'D \Rightarrow OI \perp AB$$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của cung AB $\Rightarrow$ AI = BI.

Khi đó:

$$AI = BI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}.$$

Bài toán 3: Tìm tập hợp điểm M.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép vị tự V_O^k, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép vị tự V_O^k.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A và đường thẳng d cố định. M là điểm di động trên d, tìm tập hợp trung điểm của đoạn AM.

Giải

Gọi P là trung điểm của đoạn AM, ta có $M \overset{H(A,\frac{1}{2})}{\mapsto} P$.

Tập hợp các điểm M là đường thẳng d. vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng d' ảnh của d trong $\mathcal{H}(A, \frac{1}{2})$.

__Ví dụ 2:__ Trên đường tròn (C) tâm O bán kính R, cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABM.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$M \overset{\mathcal{H}(I,\frac{1}{3})}{\longmapsto} G.$$

Suy ra tập hợp các điểm G là ảnh (C') của (C) trong $\mathcal{H}(I, \frac{1}{3})$.

Dựng (C'):

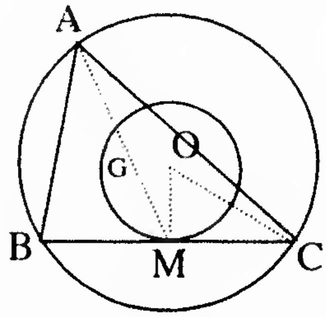
- Dựng O' sao cho $3\overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{IO}$
- (C') là đường tròn tâm O' bán kính $\frac{R}{3}$.

__Ví dụ 3:__ Cho đường tròn (O ; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O ; R) có độ dài không đổi NC = m. Tìm quỹ tích các điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Giải

Từ điều kiện:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



suy ra G là trọng tâm ΔABC.

Gọi M là trung điểm cạnh BC thì $OM \perp BC$.

Trong ΔOMC ta có:

$$OM^2 = OC^2 - MC^2 = R^2 - d^2$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Vì $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{2}{3}$ nên $V_A^{2/3}(M) = G$

Suy ra tập hợp các điểm G là đường tròn (C') với (C') = $V_A^{2/3}[(\gamma)]$.

__Ví dụ 4:__ Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} PB \perp QB \\ PB \perp AP \end{cases} \Rightarrow QB \,//\, AP \Rightarrow QB \text{ là đường trung bình của } \Delta ACM$$

$\Rightarrow$ Q là trung điểm của CM.

Ta có:

$$\begin{cases} PB \perp QB \\ AQ \perp QB \end{cases} \Rightarrow BN \,//\, AQ \Rightarrow BN \text{ là đường trung bình của } \Delta ACQ$$

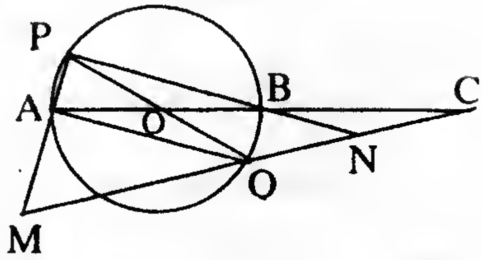
$\Rightarrow$ N là trung điểm của CQ.

). Ta lần lượt thấy:

- Với điểm M thì:

$$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ} \Rightarrow M = V_C^2(Q)$$

và vì $Q \in (O)$ nên $M \in (O_1) = V_C^2((O))$.



- Với điểm N thì:

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ} \Rightarrow N = V_C^{\frac{1}{2}}(Q)$$

và vì $Q \in (O)$ nên $N \in (O_2) = V_C^{\frac{1}{2}}((O))$.

Bài toán 4: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

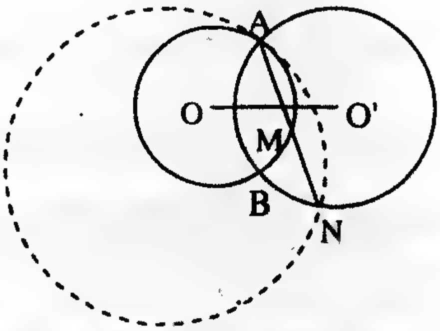
Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN, gọi $k = \frac{AN}{AM} = 2$. Thực hiện phép vị tự V tâm A, tỉ số $k = 2$ thì $N = V(M)$.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $(O'') = V(O)$, khi đó $(O'') \cap (O') = \{N\}$.
- Nối AN cắt (O) tại M.

AN là đường thẳng d phải dựng



Chứng minh: Ta có ngay M, N theo thứ tự thuộc đường tròn (O) và (O'), ngoài ra:

$$N = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AN.

Biện luận: Vì (O") cắt (O') tại duy nhất một điểm N nên bài toán chỉ có một nghiệm hình.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

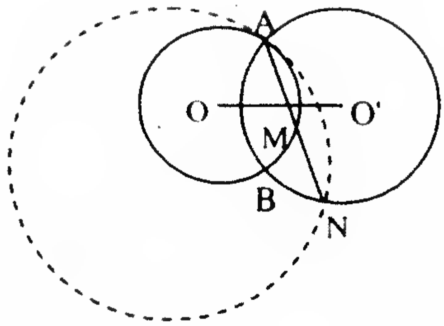
Giải

). *Phân tích*: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN, gọi $k = \frac{AN}{AM} = 2$. Thực hiện phép vị tự V tâm A, tỉ số $k = 2$ thì $N = V(M)$.

c. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng (O") = V(O), khi đó (O") ∩ (O') = {N}.
- Nối AN cắt (O) tại M.

AN là đường thẳng d phải dựng



d. *Chứng minh*: Ta có ngay M, N theo thứ tự thuộc đường tròn (O) và (O'), ngoài ra:

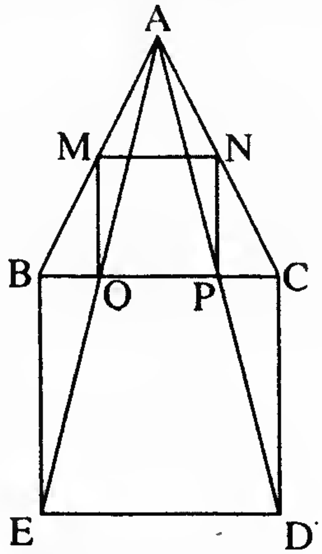
$$N = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AN.

e. *Biện luận*: Vì (O") cắt (O') tại duy nhất một điểm N nên bài toán chỉ có một nghiệm hình.

<u>Ví dụ 3:</u> Dựng hình vuông nội tiếp trong một tam giác cho trước (hình vuông nội itếp tam giác là hình vuông có hai đỉnh ở trên một cạnh, hai đỉnh còn lại ở trên hai cạnh còn lại của tam giác)

Giải



Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ nội tiếp trong am giác ABC cho trước. Gọi $k = \dfrac{MN}{BC}$.

Thực hiện phép vị tự tâm A, tỉ số k thì hình vuông MNPQ sẽ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng hình vuông BCDE sao cho BCDE và ABC nằm ở hai bên của đường thẳng BC.
- AD cắt cạnh BC tại P; AE cắt cạnh BC tại Q
- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC cắt cạnh AC tại N
- Dựng đường thẳng qua N, song song với BC cắt cạnh AB tại M

Thì MNPQ là hình vuông phải dựng

Chứng minh: Theo cách dựng ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC.

Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AE}} = k$$

do đó:

$$V_A^k : MNPQ \mapsto BCDE$$

mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông

Biện luận: Ta luôn chỉ có một hình vuông BCDE ở khác phái của tam giác ABC đối với đường thẳng BC nên luôn có chỉ một điểm P và chỉ một điểm Q ở trên cạnh BC.

Vậy bài toán có một và chỉ một nghiệm hình.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Các khẳng định sau đây có đúng không?

a. Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b. Phép vị tự không có thể có quá một điểm bất động.

c. Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biết thì mọi điểm đều bất động.

Bài 2. Với ΔABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Chứng tỏ rằng trọng tâm G của ΔABC là đường tròn (O'; R') là ảnh của đường tròn (O; R) tâm I (I là trung điểm của BC) tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

Bài 3. Với ΔABC có trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng ba điểm G, H, O thẳng hằng (được gọi là *đường thẳng Ơ-le*).

Bài 4. Cho hình thang ABCD có các đáy CD = 3AB. Hãy xác định phép vị tự biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O_1) có bán kính lần lượt là R và 3R tiếp xúc trong với nhau tại A. Nếu (O) biến thành (O_1) trong phép vị tự tâm A thì tỉ số vị tự là bao nhiêu?

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm I ở ngoài hình tròn (O). Gọi (O') là ảnh của (O) trong $\mathcal{H}(I,k)$, $k \neq 1$. Chứng minh rằng I là giao điểm các tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

Bài 7. Cho hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn (O,R) và điểm A chạy trên đường tròn này. Chứng minh rằng trọng tâm G của ΔABC nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn này.

Bài 8. Trên cạnh BC của ΔABC, lấy hai điểm M, N sao cho BM = CN. Qua M và N lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AB, AC. Chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này nằm trên trung tuyến qua A của ΔABC.

Bài 9. Cho ΔABC và một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng các đường tròn (AMN) và (ABC) tiếp xúc nhau.

Bài 10. Cho ΔABC có A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi A'x, B'y, C'z theo thứ tự là các đường thẳng song song với các đường phân giác trong của các góc A, B, C trong tam giác ABC. Chứng minh rằng A'x, B'y, C'z đồng quy.

Bài 11. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đối một tiếp xúc ngoài tại A, B, C. dây AC kéo dài của (O_1) gặp (O_3) tại A_1. vẽ đường kính A_1A_2 của (O_3). Chứng minh rằng A, B, A_2 thẳng hàng.

Bài 12. Cho tứ giác ABCD có I và J lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AB và CD. Gọi M, N là trung điểm của các đường chéo của tứ giác AIJD; P, Q là trung điểm các đường chéo của tứ giác BIJC. Chứng minh rằng: hoặc 4 điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường thẳng hoặc chúng tạo thành một hình bình hành.

Bài 13. M, N, P là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường trong ngoại tiếp của tam giác ABC, I là tâm đường tròn (MNP).

a. Chứng minh tam giác MNP là ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra 4 điểm O, G, I, H thẳng hàng và I là trung điểm đoạn OH.

b. Chứng minh rằng phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến đường trong (ABC) thành đường tròn (MNP). Tueg đó suy ra, trong một tam giác, trung điểm 3 cạnh, chân 3 đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm với 3 đỉnh là 9 điểm cùng ở trên một đường tròn.

Bài 14. Cho đường tròn (O) và một điểm P cố định. Một cát tuyến di động qua P cắt (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các trung điểm của IP.

Bài 15. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Đường kính vẽ từ A gặp (O) tại B và (O') tại C. Một đường thẳng di động qua A gặp (O) tại M và (O') tại N. Tìm tập giao điểm I của BN và CM.

Bài 16. Cho đường tròn (O, R) và một điểm I cố định với OI = 2R; M là điểm di động trên (O), Phân giác của góc IOM cắt IM tại M_1. Tìm tập hợp các điểm M_1.

Bài 17. Cho tứ giác ABCD có A, B, C cố địng và D di động sao cho AD = l (l>0)

a. Tìm tập hợp trung điểm I của đường chéo BD.

b. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn nối trung điểm hai đường chéo AC và BD

Bài 18. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có A, B cố định, C, D di động sao cho AD = a, CD = b (a, b là hằng số dương) . Đặt AB = d, các đường chéo cắt nhau tại I.

a. Tìm tập hợp các điểm C

b. Tìm tập hợp các điểm I

Bài 19. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở goài đường tròn. Tù A kẻ một tiếp tuyến AB của một đường tròn (B là tiếp điểm) và một cát tuyến di động AMN. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác BMN.

Bài 20. Cho ΔABC và một điểm O. Dựng ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm O với tỉ số:

a. k = 1. b. k = 2. c. k = −1.

Bài 21. Dựng hình vuông nội tiếp trong một tam giác cho trước. (Hình vuông nội tiếp trong tam giác là hình vuông có hai đỉnh nằm trên một cạnh, hai đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh còn lại).

Bài 22. Dựng đường tròn qua điểm A cho trước, tiếp xúc với hai đường thẳng Ox và Oy cho trước. (Điểm A không ở trên Ox hay Oy).

Bài 23. Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Hãy dựng một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với hai tia Ox và Oy.

Bài 24. Cho ΔABC nhọn. Dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên cạnh đáy BC và hai đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh AB và AC (gọi hình vuông nội tiếp một tam giác cho trước).

Bài 25. Trong một đường mặt phẳng đã cho, hãy dựng một dây cung sao cho các giao điểm cảu nó với bán kính cho trước không nằm trên một đường thẳng, chia nó thành ba đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 26. Dựng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$ và độ dài trung tuyến BM = m, CN = n.

Bài 27. Dựng tam giác ABC biết $\hat{A} = \alpha$, $\frac{AB}{AC} = k$ và độ dài trung tuyến AM = m (α, k, m cho trước).

Bài 28. Dựng đường tròn (O) qua A cho trước và tiếp xúc với hai đường thẳng cắt nhau (d_1), (d_2) cho trước.

Bài 29. Cho hai đường tròn cắt nhau (O) và (O'). Gọi A là một giao điểm. Hãy dựng một đường thẳng qua A cắt (O) tại M và (O') tại N sao cho AM = 2AN.

Bài 30. Cho đường tròn (O) và đường thẳng (d) không có điểm chung với (O), A là một điểm trên (d). Hãy dựng đường tròn (γ) tiếp xúc với (O) và tiếp xúc với (d) tại A.

CHỦ ĐỀ 8
PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa 1: *Phép biến hình* F *gọi là phép đồng dạng tỉ số* k (k > 0) *nếu với hai điểm* M *và* N *bất kì và ảnh* M' *và* N' *của chúng ta luôn có* M'N' = kMN.

Định lí: *Mọi phép đồng dạng* F *tỉ số* k (k > 0) *đều là hợp thành của một phép vị tự* V *tỉ số* k *và một phép dời hình* D.

Hệ quả: *Phép đồng dạng tỉ số* k:

- *Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.*
- *Biến đường thẳng thàng đường thẳng, biến tia thành tia.*
- *Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với* k.
- *Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số* k.
- *Biến đường tròn có bán kính* R *thành đường tròn có bán kính* kR.
- *Biến góc thành góc bằng nó.*

2. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa 2: *Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tìm phép đồng dạng biến hình (H_1) thành (H_2).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm một phép dời hình D biến hình (H_1) thành (H_1').

Bước 2: Tìm một phép vị tự V biến hình (H_1') thành (H_2).

Bước 3: Kết luận: tồn tại phép đồng dạng F là hợp thành của phép vị tự V và phép dời hình D.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

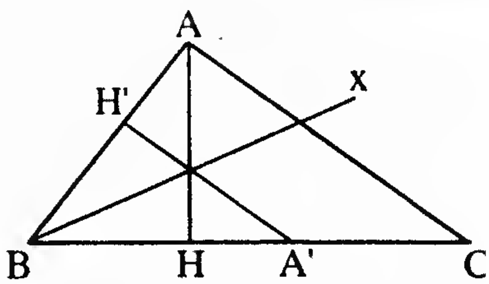
Gọi P_1 và P_2 là hai đa giác đều có cùng số cạnh, ta thực hiện:

- Phép quay biến P_1 thành P_1' có cạnh song song với cạnh của P_2.
- Khi đó, sẽ tồn tại một phép vị tự biến P_1' thành P_2.

Từ đó, theo định lí trên thì tồn tại một phép đồng dạng biến P_1 thành P_2 nên P_1 đồng dạng với P_2.

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến ΔHBA thành ΔABC.

Giải



Nhận xét rằng:

$$\Delta HBA \backsim \Delta ABC \text{ và đặt } k = \frac{BA}{BC}.$$

Từ đó, ta đi xây dựng phép đồng dạng F biến ΔHBA thành ΔABC bằng cách:

- Gọi Bx là tia phân giác của góc B, thực hiện phép đối xứng trục Bx, ta được:

$$Đ_{Bx}(\Delta HBA) = \Delta H'BA'$$

- Thực hiện phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{BC}{BA}$ thì:

$$V_B^{\frac{BC}{BA}}(\Delta H'BA') = \Delta ABC.$$

Bài toán 2: Chứng minh tính chất hình học.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với bài toán định tính, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh (H_1) là ảnh của (H_2) qua phép đồng dạng D, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc (H_1), ta đi chứng minh $M_2 = D(M_1) \in (H_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc (H_2), ta đi chứng minh $M_1 = D(M_2) \in (H_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một phép đồng dạng để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đồng dạng để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được phép đồng dạng thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Giải

a. Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

$F(M) = M'$ và $F(G) = G'$.

Từ hệ quả, ta suy ra:

M' là trung điểm của B'C' $\Rightarrow$ A'M' là trung tuyến. (1)

$$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

b. Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của ΔABC và H là trực tâm ΔABC. Giả sử:

$F(B_1) = B_1'$, $F(A_1) = A_1'$ và $F(H) = H'$.

- Từ tính chất của phép đồng dạng, ta suy ra:

  $H' = A_1A_1' \cap B_1B_1'$. (3)

- Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép đồng dạng, ta suy ra:

  A_1A_1', B_1B_1' là các đường cao của $\Delta A'B'C'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra H' là trực tâm $\Delta A'B'C'$.

c. Ta lần lượt xét:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử:

  $F(O) = O'$.

  Từ tính chất tỉ lệ về độ dài giữa hai hai đoạn thẳng, ta suy ra:

  $O'A' = O'B' = O'C'$ bởi $OA = OB = OC$.

  Vậy, điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Ví dụ 2: Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

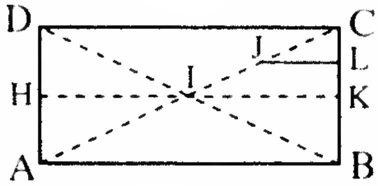
Gọi P_1 và P_2 là hai đa giác đều có cùng số cạnh, ta thực hiện:

- Phép quay biến P_1 thành P_1' có cạnh song song với cạnh của P_2.
- Khi đó, sẽ tồn tại một phép vị tự biến P_1' thành P_2.

Từ đó, theo định lí trên thì tồn tại một phép đồng dạng biến P_1 thành P_2 nên P_1 đồng dạng với P_2.

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật ABCD, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.

Giải



Nhận xét rằng:

- Với phép đối xứng tâm I, ta có:

$$Đ_I(IHDC) = IKBA.$$

- Với phép vị tự tâm C tỉ số $\frac{1}{2}$, ta có:

$$V_C^{\frac{1}{2}}(IKBA) = JLKI.$$

Từ đó, suy ra:

$$JLKI = V_C^{\frac{1}{2}}(IKBA) = V_C^{\frac{1}{2}}(Đ_I(IHDC))$$

do đó, hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bài toán 3: Dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: Dựng ΔABC nếu biết hai góc $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau:

a. Đường cao AH = h.

b. Đường trung tuyến AM = m.

c. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

Giải

Dựng $\Delta A_0B_0C_0$ có $\hat{B}_0 = \beta$, $\hat{C}_0 = \gamma$.

a. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có đường cao $A_0H_0 = h_0$, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_1 tỉ số $k_1 = \frac{h}{h_0}$ ta sẽ được:

$$F_1(\Delta A_0B_0C_0) = \Delta ABC.$$

b. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có đường trung tuyến $A_0M_0 = m_0$, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_2 tỉ số $k_2 = \frac{m}{m_0}$ ta sẽ được:

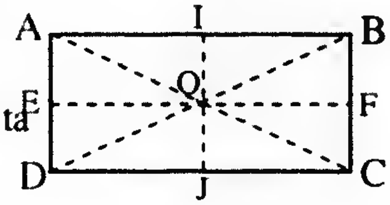
$$F_2(\Delta A_0B_0C_0) = \Delta ABC.$$

c. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp R_0, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_3 tỉ số $k_3 = \frac{R}{R_0}$ ta sẽ được:

$$F_3(\Delta A_0B_0C_0) = \Delta ABC.$$

Ví dụ 2: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của ΔAEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

Giải



Nhận xét rằng:

- Với phép đối xứng qua đường thẳng IJ, ta được:

$$Đ_{IJ}(A) = B;\ Đ_{IJ}(E) = F;\ Đ_{IJ}(O) = O$$

do đó $Đ_{IJ}(\Delta AEO) = \Delta BFO$.

- Với phép vị tự tâm B tỉ số 2, ta được:

$$V_B^2(B) = B;\quad V_B^2(F) = C;\quad V_B^2(O) = D$$

do đó $V_B^2(\Delta BFO) = \Delta BCD$.

Ví dụ 3: Cho ΔABC. Dựng ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:

a. Với phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ thì:

$V_B^{\frac{1}{2}}(A) = A_1 \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ do đó A_1 chính là trung điểm của BA.

$V_B^{\frac{1}{2}}(B) = B$.

$V_B^{\frac{1}{2}}(C) = C_1 \Rightarrow \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ do đó C_1 chính là trung điểm của BC.

Từ đó, ta được:

$V_B^{\frac{1}{2}}(\Delta ABC) = \Delta A_1BC_1$.

b. Với phép đối xứng qua đường trung trực của BC (đường thẳng (d)) thì:

$Đ_d(A_1) = A_2$; $Đ_d(B) = C$; $Đ_d(C_1) = C_1$.

Từ đó, ta được:

$Đ_d(\Delta A_1BC_1) = \Delta A_2CC_1$.

Vậy, ta có kết luận:

$$F(\Delta ABC) = Đ_d(V_B^{\frac{1}{2}}(\Delta ABC)) = Đ_d(\Delta A_1BC_1) = \Delta A_2CC_1.$$

Bài toán 4: Hệ toạ độ đối với phép đồng dạng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện thông qua hệ toạ độ của các phép biến hình.

__Ví dụ 1:__ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; −3), bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

Giải

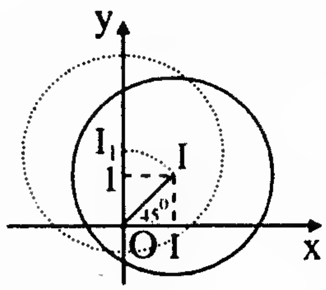
Nhận xét rằng:

- Với phép vị tự tâm O tỉ số 3, ta được:
$$V_O^3((I;2)) = (I_1; R_1)$$
trong đó:
$$\overrightarrow{OI_1} = 3\overrightarrow{OI} \Rightarrow I_1(3; -9).$$
$$R_1 = 3.2 = 6.$$
- Với phép đối xứng qua trục Ox ta được:
$$ĐOx((I_1; R_1)) = (I_2; R_1) \text{ với } I_2(3; 9)$$

Từ đó suy ra:
$$(I_2, 6): (x-3)^2 + (y-9)^2 = 36.$$

__Ví dụ 2:__ Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I (1; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.

Giải



Ta lần lượt thực hiện:

c. Với phép quay tâm O góc 45^0 thì:
$$Q_O^{45^0}(I) = I_1(0; \sqrt{2}) \Rightarrow Q_O^{45^0}((I, 2)) = (I_1, 2).$$

d. Với phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$ thì:
$$V_O^{\sqrt{2}}((I_1, 2)) = (I_2, 2\sqrt{2}),$$

trong đó:
$$\overrightarrow{OI_2} = \sqrt{2}\overrightarrow{OI_1} = \sqrt{2}((0; \sqrt{2})) \Rightarrow I_2(0; 2).$$

Từ đó, ta được:
$$(I_2, 2\sqrt{2}): \begin{cases} \text{tam } I_2(0;2) \\ R = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (I_2, 2\sqrt{2}): x^2 + (y-2)^2 = 8.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đồng dạng với nhau.

Bài 2.

a. Chứng minh rằng với hai đoạn thẳng bất kì AB và A'B' luôn có phép đồng dạng biến A thành A' và biến B thành B'.

b. Chứng minh rằng hai đường cônic có cùng tâm sai e thì đồng dạng với nhau.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, AC = 2AB. Gọi Q là phép quay tâm A, góc quay $\varphi = (AB, AC)$, V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, còn F là phép hợp thành của V và Q.

a. Tìm ảnh của các điểm A, B, C qua phép F.

b. Phép F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn nào ?

c. Chứng minh rằng với mỗi điểm M nằm trên đường tròn tâm B bán kính BA (M khác A), có một điểm N nằm trên đường tròn tâm C bán kính CA sao cho ΔAMN đồng dạng với ΔABC.

d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Q và V.

Bài 4. Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; 2R) tiếp xúc ngoài với nhau tại O, d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số 2, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là phép hợp thành của V và Đ.

a. F biến điểm O và I thành những điểm nào ?

b. F biến đường tròn (I; R) thành hình nào ?

c. Với điểm M không nằm trên d và M' = F(M). Chứng minh rằng nếu E là giao điểm của MM' và d thì EM' = 2EM.

d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Đ và V.

Bài 5. Dựng ΔABC nếu biết hai góc $\widehat{B} = 30^0$, $\widehat{C} = 120^0$ và một trong các yếu tố sau:

a. Đường cao AH = 2cm.

b. Đường trung tuyến AM = 6cm.

c. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp bằng 4cm.

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

CHỦ ĐỀ 1
ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là "*điểm*", "*đường thẳng* " và "*mặt phẳng* ".

1. QUAN HỆ THUỘC

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:
- Điểm A *thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \in d$.
- Điểm A *không thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng α có thể xảy ra hai trường hợp:
- Điểm A *thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \in \alpha$.
- Điểm A *không thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \notin \alpha$.

2. CÁC TIÊN ĐỀ

Tiên đề 1: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tiên đề 2: *Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.*

Tiên đề 3: *Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.*

Tiên đề 4: *Có ít nhất bốn điểm không đồng phẳng.*

3. NHỮNG KẾT QUẢ MỞ ĐẦU

Định lí 1: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất và chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Khi đó, đường thẳng chung được gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng.

Định lí 2: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.*

Định lí 3: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng α. Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng α không có điểm chung, tức là:

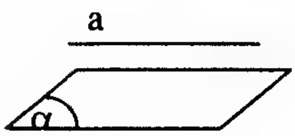
$$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, \alpha.$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng α chỉ có một điểm chung, tức là:

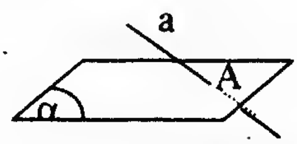
$$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } \alpha \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng α có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

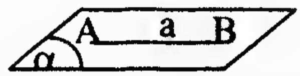
$$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha.$$



$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a // \alpha$



$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow a$



$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha$

5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho 2 mặt phẳng α và β. Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng α và β không có đường thẳng chung, tức là:

$$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha \,//\, \beta.$$

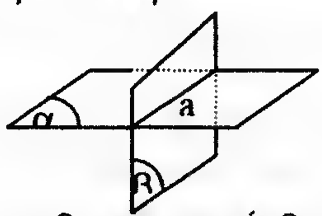
b. Hai mặt phẳng α và β chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

$$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow \alpha \text{ cắt } \beta.$$

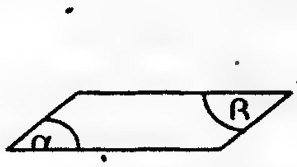
c. Hai mặt phẳng α và β có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

$$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta.$$

$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha // \beta$



$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow \alpha$ cắt β



$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$

6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho 2 đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$a \,//\, b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha \\ a \cap b = \phi \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

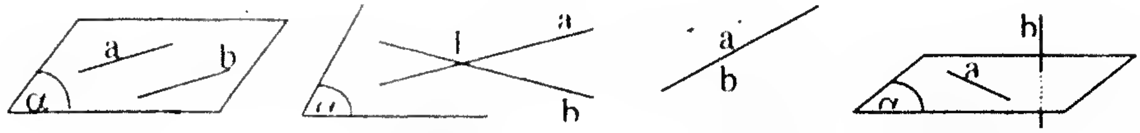
$$a \text{ cắt } b \Leftrightarrow a \cap b = \{I\}.$$

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b$.

d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

a chéo b $\Leftrightarrow$ a, b không đồng phẳng..



a//b a cắt b a≡b a,b chéo nhau

7. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

7.1. Cách xác định đường thẳng

Có ba cách xác định một đường thẳng:

Cách 1: Biết hai điểm phân biệt A, B của đường thẳng. Kí hiệu (AB).

Cách 2: Biết một điểm của đường thẳng và phương của đường thẳng đó.

Cách 3: Biết hai mặt phẳng phân biệt cùng chứa đường thẳng cần tìm.

7.2. Cách xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Biết 3 điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Biết 1 điểm A và một đường thẳng d không chứa A của mặt phẳng, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Biết 2 đường thẳng cắt nhau a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

Cách 4: Biết 2 đường thẳng song song a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các tiên đề xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để biết khi nào một điểm thuộc một mặt phẳng, ta có các kết quả sau:
   - Giả sử α là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C thì khi đó A, B, C đều thuộc α.
   - Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng α, thì khi đó điểm M thuộc a đều thuộc α.
2. Để chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α ta đi chứng minh tồn tại hai điểm phân biệt A, B thuộc a và thuộc α.
   - Nếu mặt phẳng α cố định thì ta khẳng định được thêm rằng " *Đường thẳng* a *nằm trong một mặt phẳng cố định* α ".
   - Nếu hai điểm A, B cố định thì ta khẳng định được thêm rằng " *Mặt phẳng* α *chứa một đường thẳng cố định* a ".

3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b chéo nhau, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, cụ thể:
   - Giả sử a, b không chéo nhau, tức là có một mặt phẳng α chứa cả a và b.
   - Suy ra một kết luận vô lý (trái với giả thiết hoặc trái với các tiên đề, các định lí).
   - Kết luận rằng hai đường thẳng a, b chéo nhau.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

Giải

Với ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Giả sử:

$$a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ c \cap a = \{C\}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt.

Do a, b, c phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC). Ta có:

- Đường thẳng a có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên a $\in$ (ABC).
- Tương tự b $\in$ (ABC) và c $\in$ (ABC).

Vậy, ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng (ABC).

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử $A \equiv B$.

Nếu $A \neq C$ thì $a \equiv c$, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có:

$$A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow \text{a, b, c đồng quy.}$$

Vậy, ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho góc $\widehat{xOy}$. A là điểm ngoài α. M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

1. Giả sử OM = ON. Chứng minh rằng trung tuyến AP của ΔAMN luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
2. Gọi d là đường thẳng cố định qua A và cắt α tại một điểm không thuộc Ox, Oy. MN di động nhưng luôn cắt d.
   a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
   b. Gọi B là điểm cố định trên d, $B \neq A$ và không thuộc α. AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng Q thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

Giải

1. Ta có:

$$OM = ON \Rightarrow \text{P thuộc Oz là tia phân giác của góc } \widehat{xOy} - \text{cố định.}$$

Vậy, trung tuyến AP nằm trong mặt phẳng cố định (A, Oz).

2. Giả sử $d \cap \alpha = \{P\}$ – cố định.

a. Ta có ngay:

$d \cap MN = \{P\}$ cố định.

Vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định P.

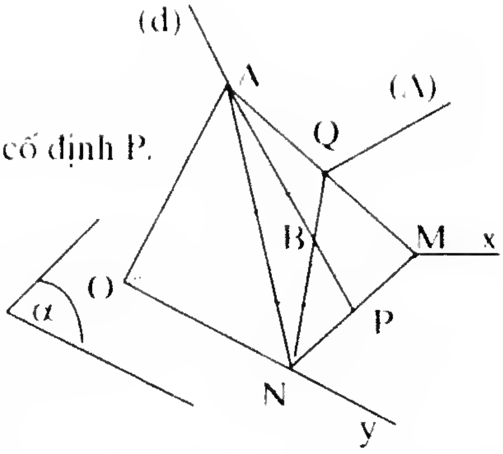
b. Ta có:

- $Q \in BN \subset (B, Oy)$ – cố định

  $\Rightarrow Q \in (B, Oy)$ – cố định.

- $Q \in AM \subset (A, Ox)$ – cố định

  $\Rightarrow Q \in (A, Ox)$ – cố định.



Vậy, điểm Q thuộc đường thẳng cố định Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A, Ox) và (B, Oy).

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng α, cho hai nửa đường thẳng song song Ax, By. M và N là hai điểm lần lượt thuộc Ax và By; $M \neq A$ và $N \neq B$. O là điểm cố định không thuộc α.

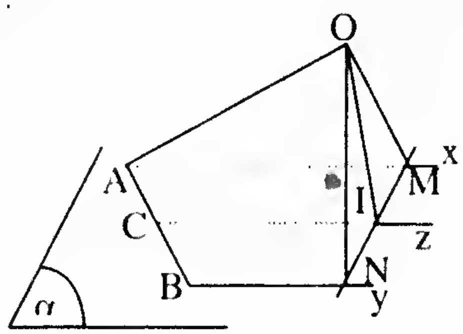
a. Chứng minh rằng OA và MN chéo nhau.

b. M, N di động, chứng tỏ rằng đường thẳng OI nối O với trung điểm I của MN nằm trong mặt phẳng cố định.

c. M, N di động nhưng AM + BN có giá trị không đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Giải

Ta đi chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử OA và MN không chéo nhau tức chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa ba điểm A, M, N không thẳng hàng, đó chính là mặt phẳng α, suy ra:



$O \in \alpha$, trái với giả thiết.

Vậy, OA và MN chéo nhau.

b. Gọi C là trung điểm AB, nhận xét rằng:

ABNM là hình thang

$\Rightarrow I \in Cz$ là đường trung bình của ABNM – cố định

Vậy, OI nằm trong mặt phẳng cố định (O, Cz).

c. Xét hình thang ABNM, ta có:

$$CI = \frac{1}{2}(AM + BN) \text{ – không đổi} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

Vậy, mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng OI cố định.

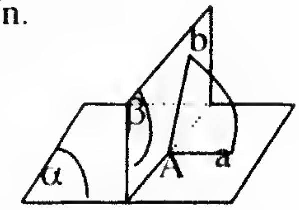
Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

Bước 2: Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến.



Chú ý: Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm, nếu có, của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng.

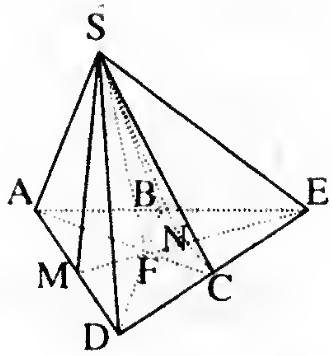
<u>Ví dụ 1:</u> Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F, S là một điểm không thuộc α.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

c. Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Giải



a. Ta có ngay S là điểm chung của (SAB) và (SCD).

Mặt khác:

$E \in AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB).$

$E \in CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD).$

Vậy, ta được $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Tương tự câu a), ta được $SF = (SAC) \cap (SBD)$.

c. Giả sử EF cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Khi đó:

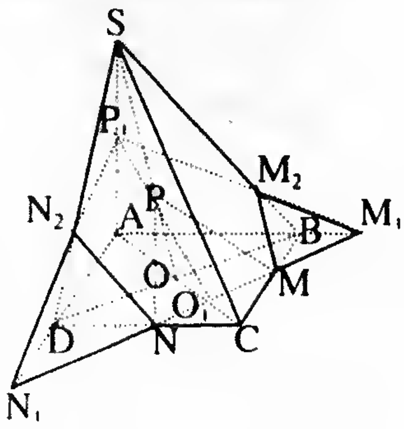
- (SEF) và (SAD) có hai điểm chung là S và M nên có giao tuyến là SM.
- (SEF) và (SBC) có hai điểm chung là S và N nên có giao tuyến là SN.

Chú ý: Trong câu c), chúng ta đã sử dụng ý tưởng trong phần chú ý của bài toán 2 để thực hiện tìm điểm chung thứ hai, cụ thể:

- Trong mặt phẳng (SEF) ta chọn đường thẳng EF.
- Trong mặt phẳng (SBC) ta chọn đường thẳng BC.
- Ta có EF và BC cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) và $EF \cap BC = \{N\}$.
- Do đó N là điểm chung của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Đối với ví dụ trên, điều này rất trực quan và thấy ngay được. Tuy nhiên, một vài bài toán các em học sinh cần hiểu được bản chất của vấn đề mới có được lựa chọn thích hợp.

<u>Ví dụ 2:</u> Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).



Giải

Đường thẳng MN cắt AB, AD và AC tại M_1, N_1 và O_1.

Khi đó:

- Nối O_1P cắt SA tại P_1.
- Nối M_1P_1 cắt SB tại M_2.
- Nối N_1P_1 cắt SD tại N_2.

Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAB) = P_1M_2$.

$(MNP) \cap (SAD) = P_1N_2$.

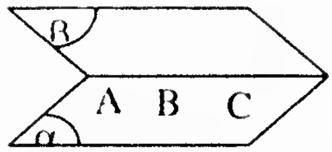
$(MNP) \cap (SBC) = MM_2$.

$(MNP) \cap (SCD) = NN_2$.

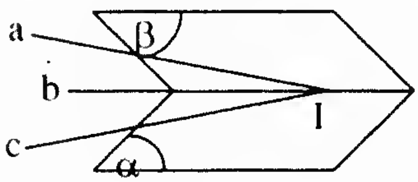
Bài toán 3:	Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Ba đường thẳng đồng quy.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.



2. Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.



Ví dụ 1: Cho mặt phẳng α và ba điểm A, B, C không thẳng hàng ở ngoài α. Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt α tại D, E, F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải

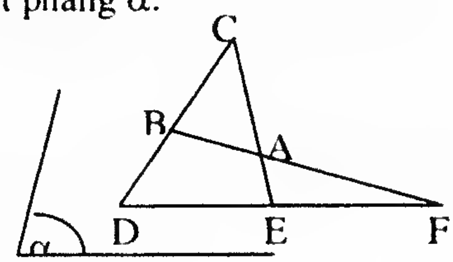
Trước tiên, ta thấy ngay ba điểm D, E, F thuộc mặt phẳng α.

Mặt khác, ta có::

$D \in BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC)$.

$E \in CA \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC)$.

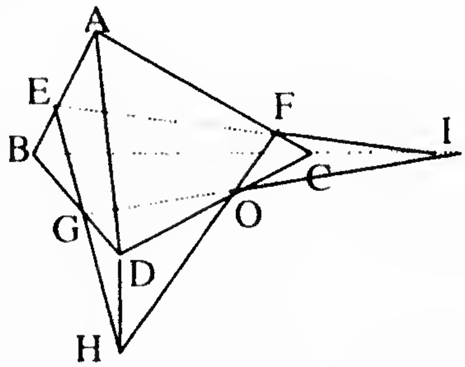
$F \in AB \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC)$.



Vậy, ta được:

$(ABC) \cap \alpha = \{D, E, F\} \Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho ΔBCD, A là một điểm không thuộc α. Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên 3 cạnh AB; AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.



Giải

Gọi O là giao điểm của HF và IG. Ta có:

$O \in HF \subset (ACD) \Rightarrow O \in (ACD)$.

$O \in IG \subset (BCD) \Rightarrow O \in (BCD)$.

Suy ra:

$O \in (ACD) \cap (BCD) = CD$.

Vậy, ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy tại O.

Bài toán 4: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

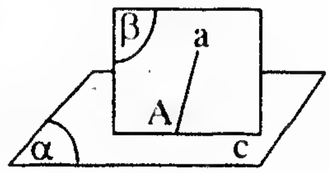
Cho đường thẳng a và mặt phẳng α, giả sử a cắt α. Để tìm giao điểm A của a và α, ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu trong mặt phẳng α có sẵn một đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A chính là giao điểm của a và α.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ β chứa a sao cho giao tuyến c của α và β dễ xác định.

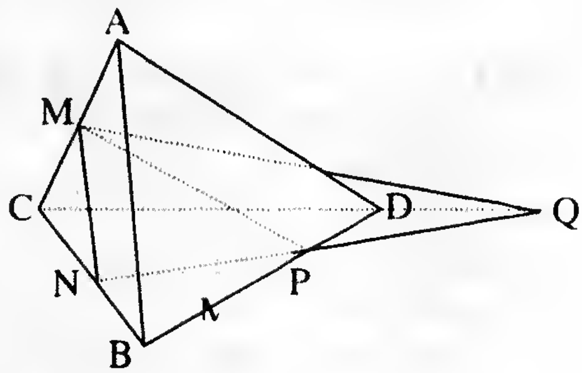
Bước 2: Trong β, đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của a và α.



__Ví dụ 1:__ Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD.

a. Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).



Giải

a. Từ giả thiết về điểm N và P ta gọi:

$Q = CD \cap NP \subset (MNP)$

$\Rightarrow Q = CD \cap (MNP)$.

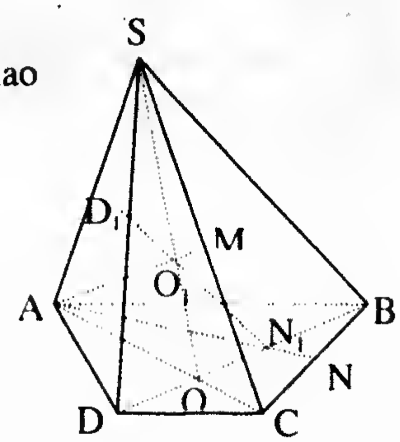
b. Ta có ngay:

$(MNP) \cap (ACD) = MQ$.

__Ví dụ 2:__ Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. M là điểm trên cạnh SC.

a. Tìm giao điểm của AM và (SBD).

b. Gọi N là một điểm trên cạnh BC, tìm giao điểm của SD và (AMN).



Giải

a. Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa AM.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra:

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$SO \cap AM = O_1 \Rightarrow AM \cap (SBD) = O_1$.

b. Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

Gọi N_1 là giao điểm của AN và BD, suy ra:

$$(SBD) \cap (AMN) = N_1O$$

Trong mặt phẳng (SBD), ta có:

$$N_1O_1 \cap SD = D_1 \Rightarrow SD \cap (AMN) = D_1.$$

Bài toán 5: Bài toán dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo bốn bước:

Bước 1: *Phân tích.*

Bước 2: *Cách dựng.*

Bước 3: *Chứng minh.*

Bước 4: *Biện luận.*

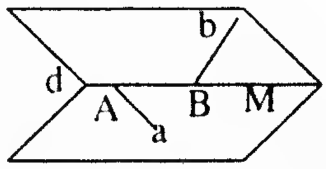
Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng một đường thẳng qua M cắt cả hai a, b.

Giải

a. *Phân tích*: Giả sử dựng được đường thẳng d qua M cắt a, b theo thứ tự tại A và B, khi đó:

M, A thuộc d, nên d ∈ (M, a).

M, B thuộc d, nên d ∈ (M, b).



Suy ra d = (M, a) ∩ (M, b).

b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng mặt phẳng (M, a).
- Dựng mặt phẳng (M, b).
- Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b).

Khi đó d là đường thẳng cần dựng.

c. *Chứng minh*: Ta thấy:

d = (M, a) ∩ (M, b), nên d đi qua M.

d, a thuộc (M, a), nên chúng có thể cắt nhau tại A.

d, b thuộc (M, b), nên chúng có thể cắt nhau tại B.

Vậy, d đi qua M có thể cắt cả a và b.

d. *Biện luận*: Nhận thấy:

- Nếu d cắt a và d cắt b, ta có nghiệm duy nhất.
- Nếu d // a hoặc d // b, bài toán vô nghiệm.

Bài toán 6: (*Bài toán quỹ tích*): Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi M là giao điểm hai đường thẳng di động d_1, d_2. Để tìm tập hợp các điểm M ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Phần thuận*: Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa d_1 và d_2. M di động trên giao tuyến cố định d của hai mặt phẳng đó.

Bước 2: *Giới hạn* (nếu có) được tập $\overline{d}$.

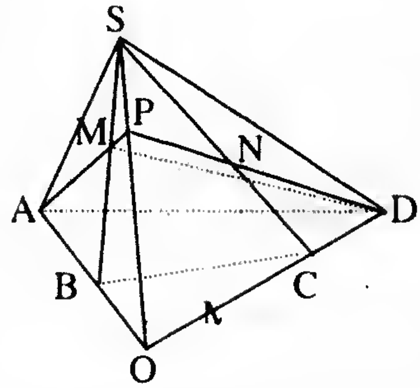
Bước 3: *Phần đảo*: Gọi M là điểm bất kỳ trên $\overline{d}$, ta đi chứng minh M là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bước 4: *Kết luận.*

Chú ý: Nếu d di động nhưng luôn đi qua điểm cố định A và cắt đường thẳng cố định a không qua A thì d thuộc mặt phẳng cố định (A, a).

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB và CD không song song. S là một điểm không thuộc α, M là điểm di động trên cạnh SB. Mặt phẳng (ADM) cắt SC tại N. Tìm tập hợp giao điểm của AM và DN.

Giải



Phần thuận: Ta có:

$AM \subset (SAB)$ – cố định.

Mặt khác, vì DN đi qua điểm cố định D và cắt đường thẳng cố định SC nên:

$DN \subset (SCD)$ – cố định.

Giả sử AB cắt CD tại O, ta có ngay:

$(SAB) \cap (SCD) = SO$.

Vậy, tập hợp giao điểm P của AM và định nghĩa thuộc đường thẳng SO.

Giới hạn: Khi M di chuyển trên cạnh SB thì P di chuyển trên đoạn SO.

Phần đảo: Gọi P là điểm bất kỳ trên SO.

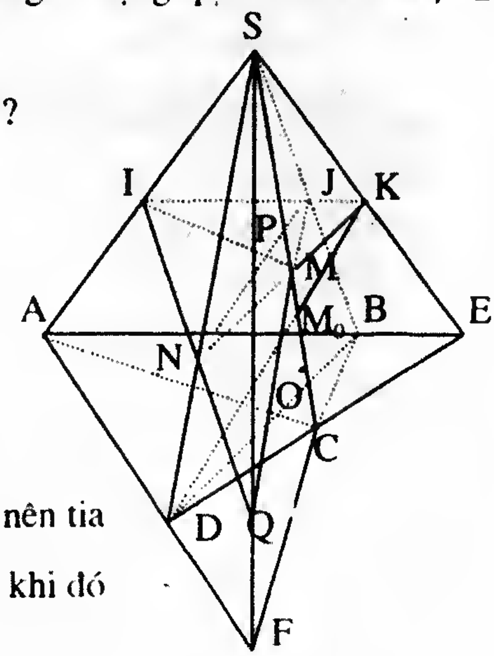
- Nối AP cắt SB tại M.
- Nối DP cắt SC tại N, N là giao điểm của mặt phẳng (ADM) với SC và P chính là giao điểm của AM và DN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SO.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F và AD < DF. S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. α là mặt phẳng di động qua IJ. α cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN, SE đồng quy.
b. M chuyển động trên phần nào của cạnh SC ?
c. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.
d. Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

Giải



a. Gọi $K = IJ \cap MN$, ta có:

$K \in IJ \subset (SAB) \Rightarrow K \in (SAB)$.

$K \in MN \subset (SCD) \Rightarrow K \in (SCD)$.

Do đó $K \in SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SE đồng quy tại K.

b. Nối KD cắt SC tại M_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia KMN quét góc $\widehat{SKD}$, do đó M chạy từ S đến M_0 vì khi đó α mới cắt cạnh SC, SD.

c. Gọi $P = IM \cap JN$. Ta đi tìm tập hợp điểm P.

Phần thuận: Ta có:

$$P \in IM \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC).$$

$$P \in JN \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD).$$

Do đó:

$$P \in SO = (SAC) \cap (SBD).$$

Giới hạn: Nối DJ cắt SO tại P_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia JPN quét góc $\widehat{SJD}$, do đó P chạy từ S đến P_0 vì khi đó α mới cắt cạnh SC, SD.

Phần đảo. Gọi P là điểm bất kỳ trên SP_0. Nối JP cắt SD tại N, nối IP cắt SC tạ M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và P chính là giao điểm của IM và JN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SP_0 trên SO.

d. Gọi $Q = IN \cap JM$. Ta đi tìm tập hợp điểm Q.

Phần thuận: Ta có:

$$Q \in IN \subset (SAD) \Rightarrow Q \in (SAD).$$

$$Q \in JM \subset (SBC) \Rightarrow Q \in (SBC).$$

Do đó:

$$Q \in SF = (SAD) \cap (SBC).$$

Giới hạn: Vì AD < DF, nên tia Ix song song với SF và cắt cạnh SD tại N_0. Vậy N chạy từ S tới N_0. Nối IN_0 cắt SF tại F_0, do đó Q chạy từ S đến F_0.

Phần đảo: Gọi Q là điểm bất kỳ trên SF_0. Nối IQ cắt SD tại N, nối JQ cắt SC tại M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và Q chính là giao điểm của IN và JM.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm Q là đoạn SF_0 trên SF.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.

Bài tập 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì hai giao điểm phải nằm trên Δ.

Bài tập 3: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α và một đường thẳng b cắt α tại điểm O. Chứng minh rằng nếu điểm O không thuộc a thì a và b chéo nhau.

Bài tập 4: Chứng minh rằng có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng cho trước đôi một chéo nhau.

Bài tập 5: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm trên cạnh BD sao cho KD > KB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt phẳng (ACD) và (ABD).

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

Bài tập 7: Trong mặt phẳng α. cho ΔABC. D là một điểm không thuộc α. O là điểm bên trong ΔBCD. M là điểm trên AO.

a. Tìm giao tuyến của (MCD) với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

b. I, J là hai điểm trên BC và BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp(a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là điểm di động trên c khác I. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định.

Bài tập 9: Cho hai điểm A và B nằm trong mặt phẳng α và một điểm O nằm ngoài α. Lấy M, N theo thứ tự thuộc OA và OB, với $M \neq O$, $M \neq A$, $N \neq O$, $N \neq A$. Giả sử MN cắt α tại C. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 10: Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài tập 11: Trong mặt phẳng α, cho góc $x\hat{O}y$. A là điểm ngoài α. M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

1. Giả sử OM = ON. Chứng minh rằng trung tuyến AP của ΔAMN luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
2. Gọi d là đường thẳng cố định qua A và cắt α tại một điểm không thuộc Ox, Oy. MN di động nhưng luôn cắt d.
   a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
   b. Gọi B là điểm cố định trên d, $B \neq A$ và không thuộc α. AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng Q thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định. Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với SI < IA và SJ > JC. Một mặt phẳng β quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN và SO đồng quy; (O là giao điểm của AC và BD). Suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.

b. AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c. IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 13: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. Gọi M là một điểm nằm trong ΔSCD.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b. Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

c. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài tập 14: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm nằm trong ΔSCD.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b. Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

c. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài tập 15: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Lấy I, J lần lượt là hai điểm bên trong ΔABC và ΔABD. M là điểm tuỳ ý trên CD. Tìm giao điểm của IJ và (ABM).

Bài tập 16: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a. Tìm giao điểm I của GM và mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng CD nằm trong mặt phẳng (CGM).

b. Chứng minh rằng (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (CGM).

c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AGM).

Bài tập 17: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, J là hai điểm cố định trên AB, AC và IJ không song song với BC. α là mặt phẳng quay quanh IJ. α cắt CD, BD lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

b. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

c. Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

Bài tập 18: Trong mặt phẳng α cho hai đường thẳng d, d' cắt nhau tại O. A, B là hai điểm cố định ở ngoài α và AB không song song với α. Một mặt phẳng β quay quanh AB cắt d tại M và d' tại N. Chứng minh rằng:

a. MN luôn đi qua một điểm cố định.

b. Giao điểm I của AM và BN ở trên đường thẳng cố định.

c. Giao điểm J của AN và BM ở trên đường thẳng cố định.

d. IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 19: Trong mặt phẳng α, cho hình thang ABCD có các cạnh đáy là AB và CD với AB = 2CD. S là một điểm không thuộc α. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với JS > JC.

a. β là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt SD, SB theo thứ tự tại M, N. M, N di động trên phần nào của đoạn SD, SB ? Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

b. γ là mặt phẳng quay quanh IJ cắt AD tại P. Tìm giao điểm Q của γ và cạnh CD và tập hợp giao điểm của IQ và JP.

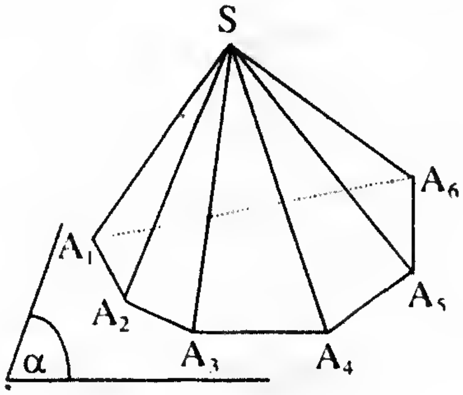
CHỦ ĐỀ 2
HÌNH CHÓP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng α cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài α. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình tạo bởi n miền đa giác đó và miền đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.



Trong đó:

- Điểm S gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp.

Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Chú ý: Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện.

2. THIẾT DIỆN

Định nghĩa: Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng α là một đa giác phẳng tạo bởi các đoạn giao tuyến của α với các mặt bên hay mặt đáy của hình chóp.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Thiết diện của hình chóp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của α với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của α với các mặt khác. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt này.

Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện

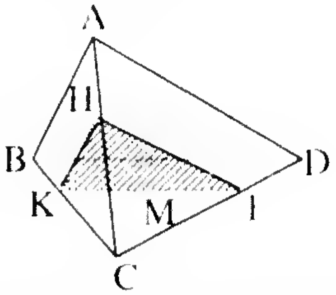
Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC. Trong ΔBCD lấy điểm M sao cho hai đường thẳng KM và CD cắt nhau. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM).

Giải

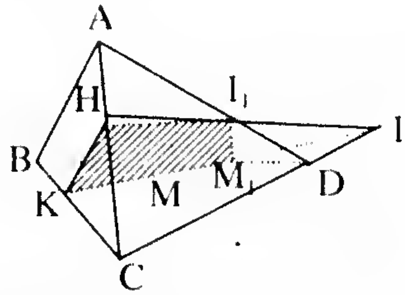
Gọi $I = KM \cap CD$. Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Điểm I thuộc đoạn CD (Hình a). Khi đó ta được ba đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó thiết diện cần tìm là ΔHIK.

(a)



(b)



Trường hợp 2: Điểm I ở ngoài đoạn CD (Hình b). Khi đó:

- Gọi $M_1 = KM \cap BD$.
- Nối IH cắt AD tại I_1.

Ta được 4 đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó thiết diện cần tìm là tứ giác HKM_1I_1.

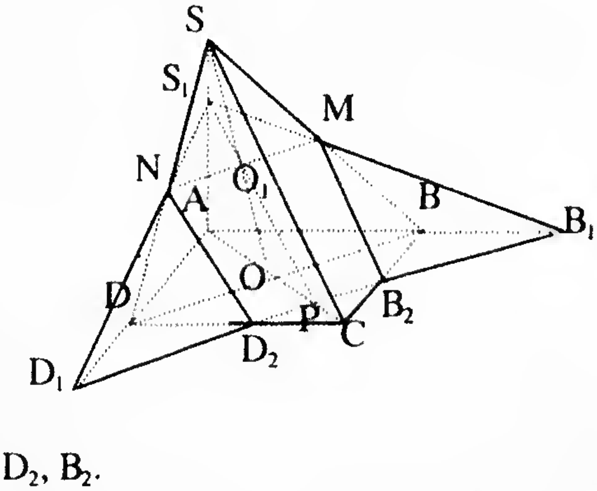
Ví dụ 2: Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SD và OC.

a. Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và tìm giao điểm của SA với (MNP).

b. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP)

c. Tính tỷ số mặt phẳng (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD.

Giải



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối MN cắt SO tại O_1.
- Nối O_1P cắt SA tại S_1.

Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAC) = PS_1$.

$(MNP) \cap SA = S_1$.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối S_1N kéo dài cắt AD tại D_1.
- Nối S_1M kéo dài cắt AB tại B_1.
- Nối B_1D_1 cắt CD, CB theo thứ tự tại D_2, B_2.

Khi đó, ta được 5 đoạn giao tuyến là S_1M, MB_2, B_2D_2, D_2N và NS_1. Do đó thiết diện cần tìm là đa giác $S_1MB_2D_2N$.

c. Ta lần lượt có:

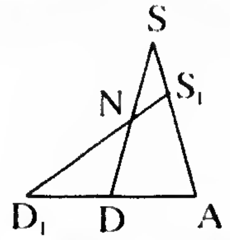
- MN là đường trung bình của ΔSBD nên O_1 là trung điểm SO, suy ra:

$$PO_1 // SC \Rightarrow \frac{S_1S}{S_1A} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}.$$

- Xét ΔSAD với S_1, N, D_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{NS}{ND}\cdot\frac{D_1D}{D_1A}\cdot\frac{S_1A}{S_1S}=1$$

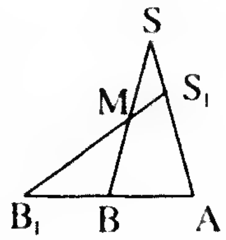
$$\Rightarrow \frac{D_1D}{D_1A}=\frac{1}{3}. \quad (1)$$



- Xét ΔSAB với S_1, M, B_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{MS}{MB}\cdot\frac{B_1B}{B_1A}\cdot\frac{S_1A}{S_1S}=1$$

$$\Rightarrow \frac{B_1B}{B_1A}=\frac{1}{3}. \quad (2)$$



Từ (1), (2), suy ra:

$BD \,//\, B_1D_1 \Rightarrow B_2D_2$ là đường trung bình của ΔCBD

$\Rightarrow$ nên B_2, D_2 theo thứ tự là trung điểm BC, CD

do đó:

$$\frac{D_2D}{D_2C}=1 \text{ và } \frac{B_2B}{B_2C}=1.$$

Chú ý: Định lí Mêlêlaus có nội dung như sau: " *Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC (hoặc trên phần kéo dài của chúng) lấy các điểm C_1, A_1, B_1 thì C_1, A_1, B_1 thẳng hàng khi và chỉ khi:* $\dfrac{A_1B}{A_1C}\cdot\dfrac{B_1C}{B_1A}\cdot\dfrac{C_1A}{C_1B}=1$ ".

Bài toán 2: Diện tích của thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định thiết diện.

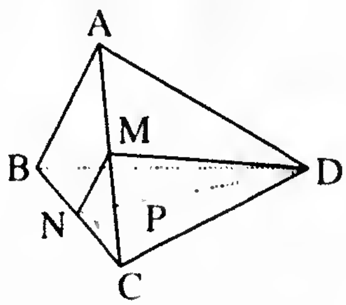
Bước 2: Diện tích thiết diện được tính thông qua diện tích tam giác và tứ giác dạng đặc biệt.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD, độ dài các cạnh bằng 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, gọi P là trọng tâm ΔBCD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MNP).

Giải

a. *Xác định thiết diện.*

Trong ΔBCD, ta thấy ngay N, P, D thẳng hàng. Suy ra MND là thiết diện cần dựng.



b. *Tính diện tích thiết diện.*

Xét ΔMND, ta có ngay:

$$MN=\frac{1}{2}AB=a, \text{ vì MN là đường trung bình.}$$

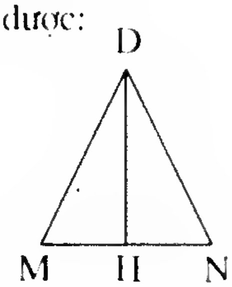
$ND = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, vì DN là đường trung tuyến trong tam giác đều.

$MD = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, vì DM là đường trung tuyến trong tam giác đều.

như vậy ΔMND cân tại D, gọi H là chân đường cao hạ từ D, ta được:

$$S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN\sqrt{DM^2 - MH^2}$$

$$= \frac{1}{2}a.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}.$$



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A'B'C').

Bài tập 2: Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không ?

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm nằm trong ΔSCD.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
b. Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).
c. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi (IJK).

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi (EFG).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA = SB = SC = SD = b. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a. Tìm giao điểm I của GM và mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng CD nằm trong mặt phẳng (CGM).
b. Chứng minh rằng (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (CGM) và hãy tính diện tích thiết diện này.
c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AGM) và hãy tính diện tích thiết diện này.

Bài tập 7: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD), hãy tính diện tích của thiết diện.

a. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (GCD).
b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 8: Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không ?

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
b. Tìm giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).
c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài tập 10: Cho hai hình thang (không bình hành) ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

(ACE) và (BDF); (BCE) và (ADF).

b. Lấy điểm M trên đoạn DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE).

c. Chứng minh rằng hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

Bài tập 11: Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD.

a. Chứng minh AG_1 và BG_2 cắt nhau. Gọi giao điểm này là I. Tính các tỉ số $\frac{IA}{IG_1}$, $\frac{IB}{IG_2}$.

b. Chứng minh I là trung điểm đoạn thẳng nối các trung điểm của AB và CD.

c. Chứng minh các đường thẳng đi qua đỉnh của tứ diện và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm, điểm này gọi là trọng tâm của tứ diện.

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABC. Gọi I, H theo thứ tự là trung điểm của SA và AB. Lấy điểm K trên đoạn SC sao cho CK = 3KS.

a. Tìm giao điểm đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK).

b. Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với mặt phẳng (ABC).

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABCD, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm I của BN và (SAC) và giao điểm J của MN và (SAC).

b. DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (BCN).

Bài tập 14: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang ABCD với AB // CD và AB > CD. Gọi I là trung điểm của CS. Mặt phẳng α quay quanh AI cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh MN luôn đi qua điểm cố định.

b. IM kéo dài cắt BC tại P, IN kéo dài cắt CD tại Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

c. Tìm tập hợp giao điểm của IM và AN.

Bài tập 15: Cho tứ diện ABCD. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng không thuộc đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD), ta vẽ một đường thẳng qua I và cắt hai đoạn AB, AD theo thứ tự tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD), ta vẽ một đường thẳng qua I và cắt hai đoạn CB, CD theo thứ tự tại M và N.

a. Chứng minh rằng 4 điểm K, L, M, N đồng phẳng.

b. Gọi O_1 là giao điểm của hai đường thẳng BN và DM, O_2 là giao điểm của hai đường thẳng BL và DK, và J là giao điểm của hai đường thẳng LM và KN. Chứng minh rằng ba điểm A, J, O_1 thẳng hàng và ba điểm C, J, O_2 thẳng hàng.

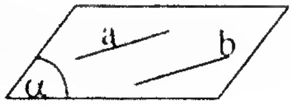
c. Giả sử hai đường thẳng KM và LN cắt nhau tại H. Chứng minh rằng H thuộc đường thẳng AC.

CHỦ ĐỀ 3
HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.



2. CÁC ĐỊNH LÍ

***Định lí 1**: Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước ta dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

Tức là: với $B \notin a$ thì $\exists!$ b qua B và $b // a$.

***Hệ quả 1**: Trong mặt phẳng α cho đường thẳng a và điểm $B \notin a$. Nếu từ B ta dựng đường thẳng b song song với a thì b nằm trong mặt phẳng α.*

Tức là:

$$\begin{cases} B \in \alpha \\ B \notin a \in \alpha \\ B \in b // a \end{cases} \Leftrightarrow b \subset \alpha.$$

***Định lí 2**: Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào cắt đường thẳng này ắt phải cắt đường kia.*

Tức là:

$$\begin{cases} a // b \\ \alpha \cap a = A \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap b = B.$$

***Định lí 3**: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tức là:

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

***Định lí 4**: Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.*

Tức là, với α, β, γ phân biệt và thoả mãn:

$$\begin{cases} \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a // b // c \\ a, b, c \text{ đồngquy} \end{array} \right.$$

***Hệ quả 2**: (Về giao tuyến) Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và lần lượt chứa hai đường thẳng song song cho trước thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng ấy.*

Tức là:

$$\begin{cases} a \in \alpha \text{ và } b \in \beta \\ a // b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow c // a // b.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai đường thẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

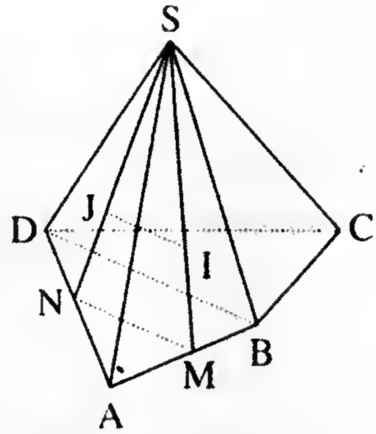
Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba,...).

Cách 2: Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.

Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến (định lí 4 hoặc hệ quả 2).

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. Chứng minh rằng IJ // BD.



Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AD, ta có:

$$\frac{SI}{SM} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // MN. \quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔABD ta có MN là đường trung bình nên:

MN // BD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // BD.

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD (AB > CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a. Chứng minh rằng MN // CD.

b. Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ADN).

c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh rằng SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì ?

Giải

a. Trong ΔSAB, ta có:

MN // AB – tính chất đường trung bình. (1)

Mặt khác:

AB // CD – vì ABCD là hình thang đáy AB, CD. (2)

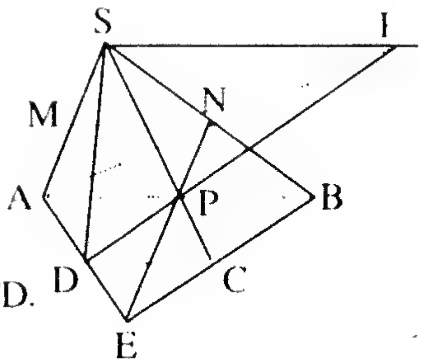
Từ (1) và (2) suy ra MN // CD.

b. Gọi $E = AD \cap BC$.

$P = SC \cap EN \subset (ADN)$

$\Rightarrow P = SC \cap (ADN)$.

c. Ta có:



$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } CD \in (SCD) \\ AB \parallel CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \parallel AB \parallel CD.$$

Nhận xét rằng:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} SI \text{ và } MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} AB \Rightarrow SI \overset{//}{=} AB \Leftrightarrow SABI \text{ là hình bình hành.}$$

Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Thiết diện chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng ngoài phương pháp " *Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng* ", ta sử dụng định lí 4, như sau:

Bước 1: Chỉ ra rằng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.

Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

Bước 3: Khi đó:

$$\alpha \cap \beta = Mx \parallel a \parallel b.$$

Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

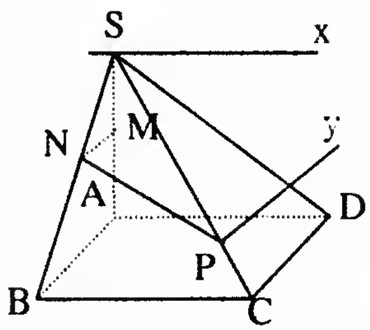
<u>Ví dụ 1:</u> Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $2SM = MA$, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho $2SN = NB$.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.

c. Điểm P nằm trên cạnh SC không trùng với S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \parallel BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \parallel AD \parallel BC.$$

b. Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{SN}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel AB. \quad (1)$$

Mặt khác, vì ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel CD$.

c. Ta có:

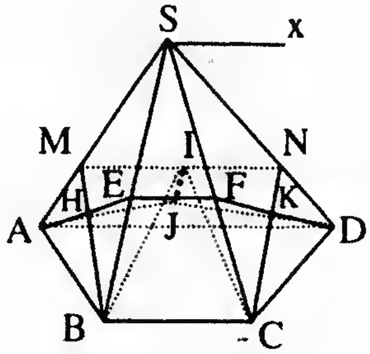
$$\begin{cases} MN \in (MNP) \text{ và } CD \in (SCD) \\ MN \,//\, CD \\ (SAB) \cap (SCD) = Py \end{cases} \Rightarrow Py \,//\, MN \,//\, CD.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, các cạnh đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔSAD, ΔSBC.

a. Tìm giao tuyến của (SAD) với (SBC).
b. Tìm giao tuyến của (BCI) với (SAD).
c. Tìm giao tuyến của (ADJ) với (SBC)
d. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Giải

a. Ta có:



$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \,//\, AD \,//\, BC.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (BCI) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (BCI) = Iy \end{cases} \Rightarrow Iy \,//\, AD \,//\, BC$$

và Iy cắt SA, SD theo thứ tự tại M, N.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADJ) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (ADJ) \cap (SBC) = Jz \end{cases} \Rightarrow Jz \,//\, AD \,//\, BC$$

và Jz cắt SB, SC theo thứ tự tại E, F.

d. Giả sử AE cắt BM tại H và CN cắt DF tại K, và ta cần đi tính độ dài HK.

Bạn đọc tự làm dựa trên định lí Ta – lét, đáp số $HK = \frac{2}{5}(a + b)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB, CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm ΔSAB.

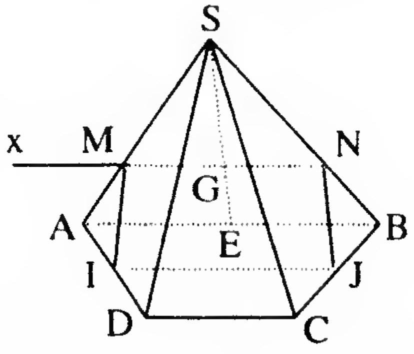
a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).
b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì ? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } IJ \in (IJG) \\ AB \,//\, IJ \\ (SAB) \cap (IJG) = Gx \end{cases} \Rightarrow Gx \,//\, AB \,//\, IJ.$$

b. Giả sử Gx cắt SA, SB theo thứ tự tại M, N. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IM, MN và NJ. Do đó thiết diện là hình thang MNJI.



Ta có:

$$MN // AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}AB.$$

$$IJ = \frac{1}{2}(AB + CD) \text{ – tính chất đoạn trung bình.}$$

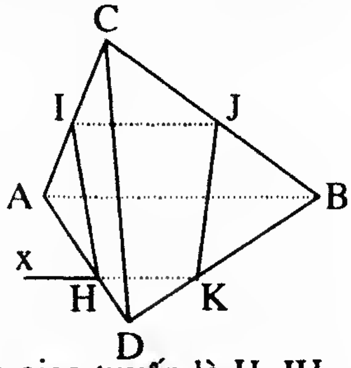
Để hình thang MNJI là hình bình hành điều kiện là:

$$MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD.$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD, các cạnh bằng nhau và bằng 6a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với KB = 2KD.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a.



Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (ABD) \text{ và } IJ \in (IJK) \\ AB // IJ \\ (ABD) \cap (IJK) = Kx \end{cases} \Rightarrow Kx // AB // IJ.$$

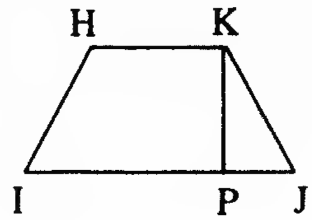
Giả sử Kx cắt AD theo thứ tự tại H. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IH, HK và KJ. Do đó thiết diện là hình thang IJKH.

Mặt khác, ta thấy ngay:

$$\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow IH = JK.$$

Vậy, thiết diện IJKH là hình thang cân.

b. Trong ΔABC, ta có:



$$IJ = \frac{1}{2}AB = 3a.$$

Trong ΔABD, ta có:

$$\frac{HK}{AB} = \frac{KD}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}AB = 2a.$$

Trong ΔBJK, ta có:

$BJ = 3a$, $BK = 4a$

$$JK^2 = BJ^2 + BK^2 - 2BJ.BK.\cos\widehat{KBJ} = (3a)^2 + (4a)^2 - 2.3a.4a.\cos 60^0 = 13a^2$$

$$\Rightarrow JK = a\sqrt{13}.$$

Xét hình thang IJKH, hạ đường cao KP, ta có:

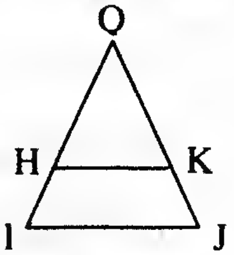
$$KP = \sqrt{JK^2 - PJ^2} = \sqrt{JK^2 - \left(\frac{IJ - HK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}.$$

$$S_{IJKH} = \frac{1}{2}(IJ + HK).KP = \frac{1}{2}(3a + 2a).\frac{a\sqrt{51}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Nhận xét: Trong lời giải câu b), vì thiết diện IJKH là hình thang cân nên việc tính diện tích của nó khá đơn giản. Trong nhận xét này, chúng ta cùng xem xét một đề xuất khác để tính được diện tích thiết diện và nó đặc biệt có ích trong trường hợp thiết diện là những đa giác không có dạng đặc thù.

Kéo dài IH và JK, chúng cắt nhau tại Q.

Khi đó: $S_{IJKH} = S_{\Delta QIJ} - S_{\Delta QHK}$.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔABC và ΔABD. Chứng minh rằng IJ // CD.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh MNPQ là hình bình hành. Từ đó, suy ra 3 đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu 4 điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì:

a. Ba đường thẳng PQ, SR, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

b. Ba đường thẳng PS, QR, BD hoặc dôi một song song hoặc đồng quy.

Bài tập 5: Cho ΔABC nằm trong mặt phẳng α. Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song và nằm về cùng một phía đối với α. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I khi M, N di động.

b. E thuộc đoạn AM và 3EM = EA, IE cắt AN tại F. Gọi Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng AQ song song với Bx và Cy và (QMN) chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a. Chứng minh rằng PQ // SA.

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng điểm K nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên BC.

c. Qua Q dựng các đường thẳng Qx // SC và Qy // SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Có thể dựng hai đường thẳng song song cắt cả a và b không ?

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng song song với a và cắt b đều nằm trong một mặt phẳng.

Bài tập 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Trên đoạn BD lấy điểm P .

a. Tìm giao tuyến của (DMN) với (BCD).

b. Tìm giao tuyến của (MNP) với (BCD).

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. M là trung điểm CD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM).

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b. Lấy điểm M tuỳ ý trên cạnh SC nhưng không trùng với S, mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tứ giác ABMN là hình gì ?

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D song song với SC.

a. Tìm giao điểm I của Dx với mặt phẳng (SAB). Chứng minh AI // SB.

b. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI). Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều. Cho $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a. Chứng minh HKMN là hình thang cân.

b. Đặt $AM = x$ ($0 \le x \le a$), tính diện tích của tứ giác HKMN theo a, x. Tính x để diện tích này nhỏ nhất.

c. Tìm tập hợp giao điểm của HM và KN; của HN và KM.

Bài tập 14: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. I, J lần lượt là trung điểm của SB, AB. M là một điểm bất kỳ trên nửa đường thẳng Ax chứa C. Biện luận theo vị trí của điểm M trên Ax các dạng của thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJM).

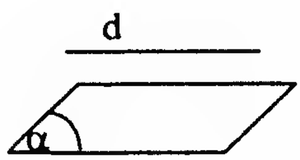
CHỦ ĐỀ 4

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

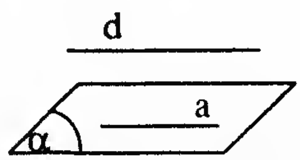
1. ĐỊNH NGHĨA

Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.



2. CÁC TÍNH CHẤT

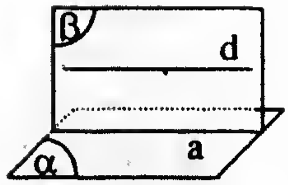
***Định lí 1**: Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó chứa trong mặt phẳng.*



Tức là, với $d \not\subset \alpha$ thì nếu:

$$d \,//\, a \subset \alpha \Rightarrow d \,//\, \alpha.$$

Định lí 2: *Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng α thì bất kỳ một mặt phẳng nào chứa d mà cắt α thì sẽ cắt mặt phẳng đó theo một giao tuyến song song với d.*



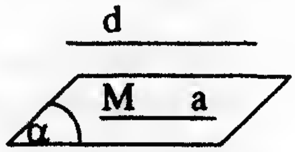
Tức là:

$$\begin{cases} d \parallel \alpha \\ d \subset \beta \cap \alpha = a \end{cases} \Rightarrow d \parallel a.$$

Hệ quả: *Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α. Nếu từ một điểm M của α dựng đường thẳng a song song với d thì đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α.*

Tức là:

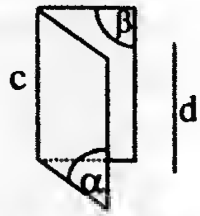
$$\begin{cases} d \parallel \alpha \\ M \in \alpha \\ M \in a \parallel d \end{cases} \Rightarrow a \subset \alpha.$$



Định lí 3: *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = c \\ \alpha \parallel d \\ \beta \parallel d \end{cases} \Rightarrow d \parallel c.$$



Định lí 4: *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Qua đường thẳng này, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với đường thẳng kia.*

Tức là, với a, b chéo nhau thì:

$$\exists!\ \alpha: \begin{cases} a \subset \alpha \\ \alpha \parallel b \end{cases}.$$

Hệ quả: *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Từ một điểm bất kỳ không thuộc mặt phẳng chứa đường thẳng này song song với đường thẳng kia, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với 2 đường thẳng đã cho.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng α ta chứng minh d không nằm trong α và song song với một đường thẳng a chứa trong α.

Chú ý: Nếu a không có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng β chứa d và nhận a làm giao tuyến của α và β.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABD và ΔACD. Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

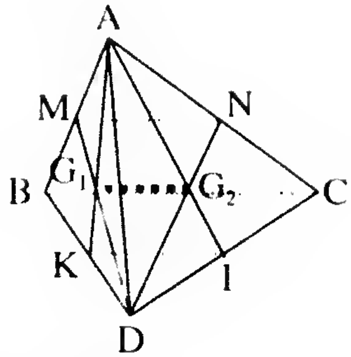
Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD.

Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_1}{DM} = \frac{2}{3}.$$



Trong ΔACD, ta có ngay:

$$\frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

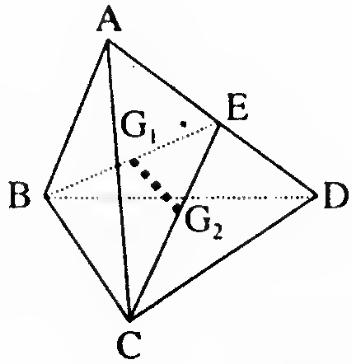
$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, KI \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (BCD).$$

$$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (ABC).$$

Cách 2: Gọi E là trung điểm của AD.

Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{2}{3}.$$



Trong ΔACD, ta có ngay:

$$\frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó, ta có:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, BC$$

Vì BC thuộc (BCD) và (ABC) nên $G_1G_2 \,//\, (BCD)$ và $G_1G_2 \,//\, (ABC)$.

Ví dụ 2: Cho chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Gọi P là trung điểm của SA.

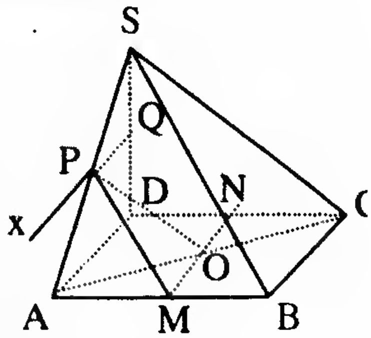
a. Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).
b. Chứng minh rằng SB song song với (MNP).
c. Chứng minh rằng SC song song với (MNP).
d. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và ΔSBC. Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD).

Giải

a. Trong hình bình hành ABCD, ta có MN là đường trung bình, do đó:

$MN \,//\, BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \,//\, (SBC)$.

$MN \,//\, AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \,//\, (SAD)$.



b. Trong ΔSAB, ta có MP là đường trung bình, do đó:

$SB \,//\, MP \subset (MNP) \Rightarrow SB \,//\, (MNP)$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

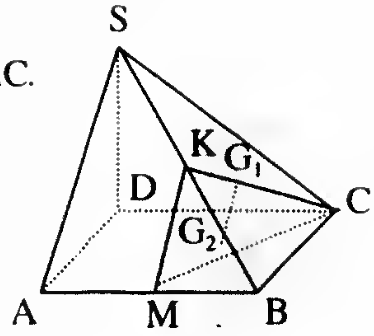
Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } MN \in (MNP) \\ AD \,//\, MN \\ (SAD) \cap (MNP) = Px \end{cases} \Rightarrow Kx \,//\, AD \,//\, MN.$$

Giả sử Px cắt SD tại Q, suy ra Q là trung điểm SD.

Trong ΔSCD ta có NQ là đường trung bình, do đó:

$SC // NQ \subset (MNP) \Rightarrow SC // (MNP)$.



Cách 2: Gọi O là trung điểm MN, suy ra O là trung điểm AC.

Trong ΔSAC, ta có OP là đường trung bình, do đó:

$SC // OP \subset (MNP) \Rightarrow SC // (MNP)$.

d. Gọi K là trung điểm SB. Ta có:

$$\frac{CG_1}{CK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{CG_2}{CM} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // MK. \quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔSAB, ta có MK là đường trung bình, do đó:

$MK // SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$G_1G_2 // SA \subset (SAD) \Rightarrow G_1G_2 // (SAD)$.

Bài toán 2:	Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện song song với một đường thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Tìm phương giao tuyến bằng định lí 2 hoặc định lí 3.
2. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước theo phương pháp đã biết.

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm bất kì trên SB và CD. α là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a. Tìm các giao tuyến của α với các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC).

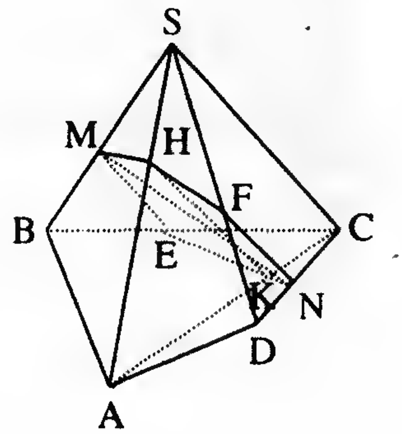
b. Xác định thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng α.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} SC // \alpha \\ Mx \in (SBC) \cap \alpha \\ Ny \in (SCD) \cap \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Mx // SC \text{ và } Mx \text{ cắt } BC \text{ tại } E. \\ Ny // SC \text{ và } Ny \text{ cắt } SD \text{ tại } F. \end{array} \right.$$



Gọi K là giao điểm của EN với AC, ta có:

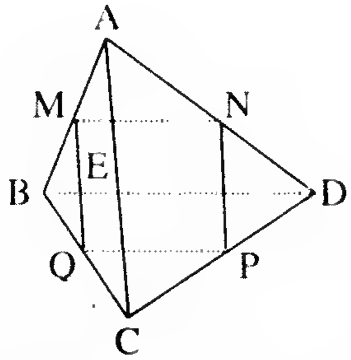
$$\begin{cases} SC // \alpha \\ SC \subset (SAC) \\ Kz \in (SAC) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow Kz // SC$$

và Kz cắt SA tại H.

b. Nối MH, FH ta được ngũ giác MENFH chính là thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng α.

Ví dụ 2: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi E là điểm nằm trong ΔABC. Mặt phẳng α qua E song song với các đường thẳng AC và BD. Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng α. Thiết diện là hình gì ?

Giải



Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} AC \,//\, \alpha \\ AC \subset (ABC) \\ Ex \in (ABC) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow Ex \,//\, AC$$

và Ex cắt AB và BC theo thứ tự tại M và Q.

$$\begin{cases} BD \,//\, \alpha \\ My \in (ABD) \cap \alpha \\ Qz \in (CBD) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} My \,//\, BD \text{ và } My \text{ cắt } AD \text{ tại } N. \\ Qz \,//\, BD \text{ và } Qz \text{ cắt } CD \text{ tại } P. \end{array}\right.$$

Ba mặt phẳng α, (ABC) và (ACD) cắt nhau theo ba giao tuyến MQ, AC, NP và MQ // AC nên MQ // NP.

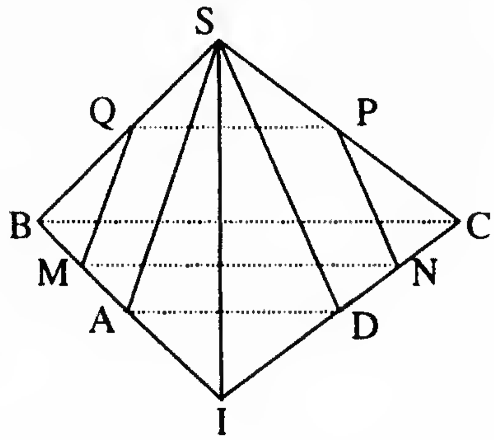
Vậy, thiết diện MNPQ là hình bình hành.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD dáy ABCD là hình thang có đáy lớn BC = 2a, AD = a, AB = b. Mặt bên SAD là tam giác đều. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AB và song song với SA và BC, α cắt CD, SC, S B lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AM, (0 < x < b). Tính giá trị lớn nhất của diện tích.

Giải



a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} SA \,//\, \alpha \\ SA \subset (SAB) \\ MQ \in (SAB) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, SA.$$

$$\begin{cases} BC \,//\, \alpha \\ MN \in (ABCD) \cap \alpha \\ PQ \in (SBC) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, PQ \,//\, BC.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SD} \overset{SA=SD}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Giả sử AB cắt CD tại I, ta có:

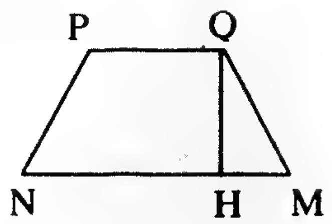
$$AD \overset{//}{=} \frac{1}{2} BC \Rightarrow AD \text{ là đường trung bình của } \Delta IBC$$

do đó IA = AB = b và:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{IM}{IB}=\frac{IA+AM}{IA+AB}=\frac{b+x}{2b}\Rightarrow MN=\frac{a(b+x)}{b}.$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{SQ}{SB}=\frac{AM}{AB}=\frac{x}{b}\Rightarrow PQ=\frac{2ax}{b}.$$



Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{MQ}{SA}=\frac{BM}{AB}=\frac{b-x}{b}\Rightarrow MQ=\frac{a(b-x)}{b}.$$

Xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH=\sqrt{MQ^2-MH^2}=\sqrt{MQ^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}a(b-x)}{2b}.$$

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).QH=\frac{1}{2}\left[\frac{a(b+x)}{b}+\frac{2ax}{b}\right].\frac{\sqrt{3}a(b-x)}{2b}$$

$$=\frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.(b+3x)(b-x).$$

Ta biến đổi:

$$S_{MNPQ}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\left[\frac{4b^2}{3}-\left(x\sqrt{3}-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\le\frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\frac{4b^2}{3}=\frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $(S_{MNPQ})_{Max}=\frac{a^2}{\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$$x\sqrt{3}-\frac{b}{\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow x=\frac{b}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng α.

a. Giả sử a // b và b // α, có thể kết luận gì về vị trí tương đối của a với α.

b. Giả sử a // α và b // α, có thể kết luận gì về vị trí tương đối của a với b.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm tam giác ABD. M là một điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG song song với (ACD).

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a. Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b. M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh MN song song với (CDEF).

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng:

a. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}.$$

b. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD) là BC = BD và AC = AD.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD. M, N là 2 điểm trên AB, CD, α là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a. Tìm các giao tuyến của α với (SAB) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α.

c. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Mặt phẳng α chuyển động luôn song song với BC và đồng thời đi qua trung điểm C_1 của cạnh SC.

a. Mặt phẳng α cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A_1, B_1, D_1. Thiết diện $A_1B_1C_1D_1$ là hình gì ?

b. Chứng minh α luôn chứa một đường thẳng cố định.

c. Xác định thiết diện mà α cắt hình chóp S.ABCD. Định M để thiết diện là hình bình hành.

d. Gọi M là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. Chứng minh rằng khi α thay đổi thì M chuyển động trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là một điểm di động trên SC, α là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a. Chứng minh α luôn chứa một đường thẳng cố định.

b. Tìm các giao điểm H và K của a với SB, SD. Chứng minh rằng $\frac{SB}{SH} + \frac{SD}{SK} + \frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

c. Thiết diện của hình chóp với α có thể là hình thang được không?

Bài tập 8: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. M và P là 2 điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho AM = CP = x, $(0 < x < a)$. Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a. Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. M là điểm chuyển động trên cạnh SC và α là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng α luôn chứa một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC.

b. Mặt phẳng α cắt SB, SD theo thứ tự tại E và F. Hãy trình bày cách dựng điểm E và F.

c. Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh rằng ba điểm I, J, A thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang. M là điểm bất kì trên cạnh AB và α là mặt phẳng qua M song song với AD và SB.

a. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

b. Chứng minh rằng α song song với SC.

Bài tập 11: Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c (a > b > c). Một mặt phẳng α song song với AB và CD, cắt tứ diện theo một thiết diện có chu vi p và diện tích s.

a. Định α để p lớn nhất, nhỏ nhất.

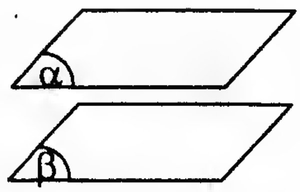
b. Định α để s lớn nhất. Tính diện tích ấy.

CHỦ ĐỀ 5
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hai mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

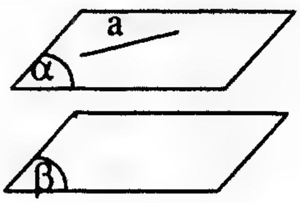


2. CÁC TÍNH CHẤT

Định lí 1: *Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì mọi đường thẳng a nằm trong α đều song song với β.*

Tức là:

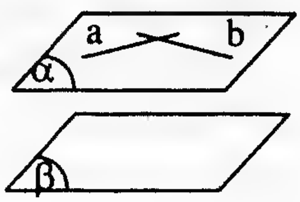
$$\begin{cases} a \in \alpha \\ \alpha // \beta \end{cases} \Rightarrow a // \beta.$$



Định lí 2: *Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng cho trước thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.*

Tức là:

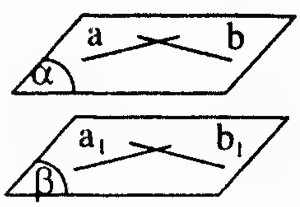
$$\begin{cases} a, b \in \alpha \\ a \text{ cắt } b \\ a // \beta \text{ và } b // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$



Hệ quả 1: *Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng của một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.*

Tức là:

$$\begin{cases} a, b \in \alpha \\ a \text{ cắt } b \\ a // a_1 \subset \beta \text{ và } b // b_1 \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$



Định lí 3: *Qua một điểm O bất kỳ nằm ngoài mặt phẳng α bao giờ cũng dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng α.*

Tức là:

$$O \notin \alpha \Rightarrow \exists!\beta: \begin{cases} O \in \beta \\ \alpha // \beta \end{cases}.$$

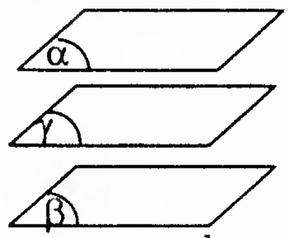
Cách dựng:

- Trong α dựng a, b cắt nhau.
- Qua O dựng $a_1 // a$, $b_1 // b$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với α.

Hệ quả 2: *Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng α thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng β song song với mặt phẳng α.*

Hệ quả 3: *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tức là:



$$\begin{cases} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$

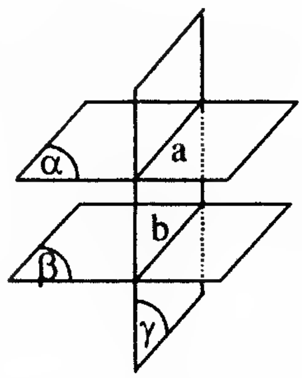
Hệ quả 4: *Nếu từ một điểm A nằm ngoài mặt phẳng α ta dựng một đường thẳng song song với α thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng qua A và song song với α.*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ A \in \beta \\ Ax // \alpha \end{cases} \Rightarrow Ax \subset \beta.$$

Định lí 4: *Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau.*

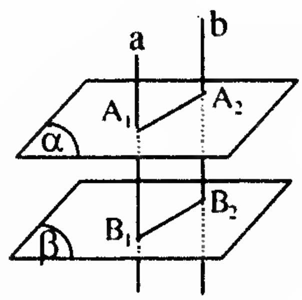
Tức là:



$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ a = \alpha \cap \gamma \\ b = \beta \cap \gamma \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

Định lí 5: *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song nhưng đoạn thẳng bằng nhau.*

Tức là:



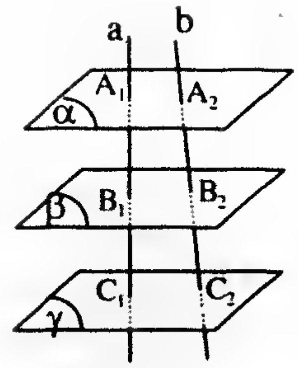
$$\begin{cases} \alpha // \beta \text{ và } a // b \\ a \cap \alpha = A_1 \text{ và } a \cap \beta = B_1 \\ b \cap \alpha = A_2 \text{ và } b \cap \beta = B_2 \end{cases} \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2.$$

Định lí 6: (Định lí Talét trong không gian) *Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta // \gamma \\ a \cap \alpha = A_1 \text{ và } a \cap \beta = B_1 \text{ và } a \cap \gamma = C_1 \\ b \cap \alpha = A_2 \text{ và } b \cap \beta = B_2 \text{ và } b \cap \gamma = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh 2 mặt phẳng song song ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia (hoặc song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia).

Chú ý:

1. Sử dụng tính chất:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow a // \alpha$$

ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng a song song với α.

2. Sử dụng định lí Ta – lét đảo ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, cụ thể:

Ba điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường thẳng a và ba điểm A_2, B_2, C_2 thuộc đường thẳng b (với a và b chéo nhau) thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng α, β, γ song song lần lượt chứa các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, từ đó ta được các kết quả:

A_1A_2 song song với β và γ.

B_1B_2 song song với α và γ.

C_1C_2 song song với α và β.

Điều quan trọng nhất cần chỉ ra được sự tồn tại của một trong ba mặt phẳng.

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau

b. Gọi I là trung điểm SC, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB và CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

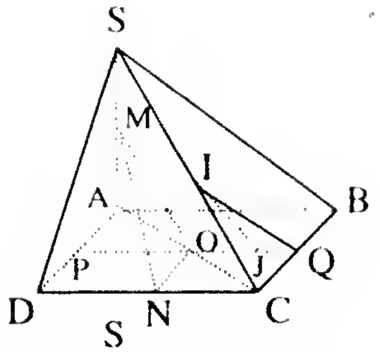
c. Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với (SAD).

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} OM // SC \\ ON // BC \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC).$$

b. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm AD và BC, suy ra J thuộc đường thẳng PQ.

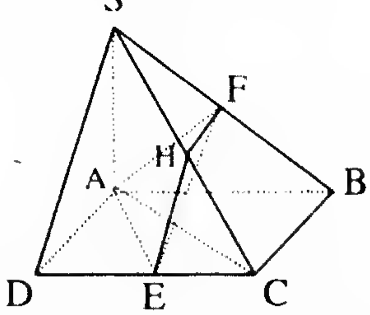


Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} PQ \,//\, AB \\ IQ \,//\, SB \end{cases} \Rightarrow (IPQ) \,//\, (SAB) \Rightarrow IJ \,//\, (SAB).$$

c. Sử dụng tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB}$$



suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng song song lần lượt chứa các đoạn thẳng SD, EF, CD và ta thấy ngay một trong ba mặt phẳng đó chính là (SAD), do đó:

EF // (SAD).

Chú ý: Nếu các em học sinh cảm thấy khó hiểu trong lời giải của câu c) thì có thể sử dụng lời giải tường minh hơn như sau:

Dựng EH // SD, $H \in SC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HS}{HC} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB} \Rightarrow HF \,//\, BC \Rightarrow HF \,//\, AD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

(HEF) // (SAD) ⇒ EF // (SAD).

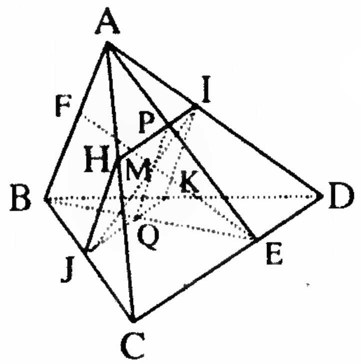
Ví dụ tiếp theo sẽ sử dụng lại cách trình bày này để giúp các em học sinh nắm vững hơn.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a. Chứng minh rằng IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước (tức điểm M thoả $\overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{MJ}$).

Giải



a. Dựng JH // AB, $H \in AC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{JB}{JC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow HI \,//\, CD. \quad (2)$$

Gọi α là mặt phẳng chứa AB và song song với CD, suy ra α là mặt phẳng cố định và (HIJ) // α.

b. Giải sử (HIJ) cắt BD tại K, dễ thấy HIKJ là hình bình hành. Qua M kẻ PQ song song với AB ($P \in HI$ và $Q \in JK$). Ta có:

$AP \cap BQ = E$ và $EM \cap AB = F$.

Nhận xét rằng:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{PI}{PH} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow \text{E là điểm chia CD theo tỉ số k.}$$

$$\frac{FA}{FB} = \frac{MP}{MQ} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow \text{F là điểm chia AB theo tỉ số k.}$$

Vậy, tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k là đoạn EF với E, F lần lượt là điểm chia CD và AB theo tỉ số k.

Bài toán 2:	Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện song song với một mặt phẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Ta sử dụng thêm định lí 4 để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.
2. Thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước được xác định thông qua việc tìm được các đoạn giao tuyến như trên.

__Ví dụ 1:__ Cho hai mặt phẳng song song α và β. A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thuộc α và MN là đoạn thẳng nằm trong β.

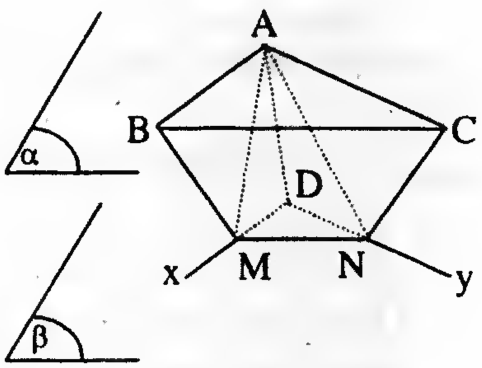
a. Tìm giao tuyến của (MAB) và β; giao tuyến của (NAC) và β.

b. Tìm giao tuyến của (MAB) và (NAC).

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ AB = \alpha \cap (MAB) \\ Mx = \beta \cap (MAB) \end{cases} \Rightarrow Mx // AB.$$



Ta có:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ AC = \alpha \cap (MAC) \\ Ny = \beta \cap (MAC) \end{cases} \Rightarrow Ny // AC.$$

b. Vì AB cắt AC tại A nên

$$Mx \cap Ny = D \Rightarrow (MAB) \cap (NAC) = AD.$$

__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA = 2a, α là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Đặt x = AM, với 0 < x < a. Định x để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

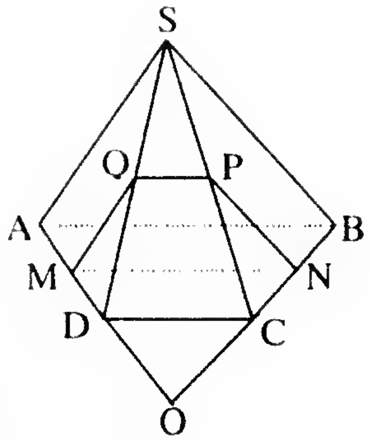
c. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD.

d. Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ MN = \alpha \cap (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$$



Lập luận tương tự ta cũng có:

NP // BS, PQ // CD, QM // SA.

Nhận xét rằng:

MN // PQ bởi AB // CD.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SB} \overset{SA=SB}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn điều kiện là:

$$MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow MN + PQ = 2MQ. \quad (1)$$

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x). \quad (2)$$

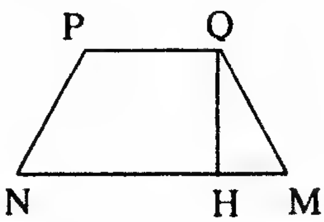
Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x. \quad (3)$$

Giả sử AB cắt CD tại O và OD = y, ta có:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{3a} \Rightarrow 3y = a + y \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{OD+DM}{OD+DA} = \frac{\frac{a}{2}+a-x}{\frac{a}{2}+a} \Rightarrow MN = 3a - 2x. \quad (4)$$



Thay (2), (3) và (4) vào (1), ta được:

$$3a - 2x + x = 4(a - x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Vậy, với $x = \frac{a}{3}$ thì MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn.

Khi đó, xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

suy ra bán kính đường tròn nội tiếp MNPQ là $r = \frac{1}{2}QH = \frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Câu c) và d) học sinh tự làm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a. Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBD).

b. Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh rằng PQ song song với (SBC).

Bài tập 2: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong 2 mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a. Chứng minh rằng (CBE) song song với (ADF).

b. Chứng minh rằng (DEF) song song với (MNN'M').

c. Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N động.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc BAC, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$ đồng phẳng.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với α lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Mặt phẳng β cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A_1, B_1, C_1, D_1.

a. Chứng minh rằng (AA_1, BB_1) song song với (CC_1, DD_1).

b. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành.

c. Chứng minh rằng $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Bài tập 5: Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By, M và N là 2 điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho AM = BN. Vẽ $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$.

a. Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài tập 6: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tìm tập hợp các điểm I trên đoạn thẳng MN và chia MN theo tỉ số k cho trước khi M, N di động lần lượt trên a, b.

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng (A'C'D') // (ABC).

Bài tập 10: Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\dfrac{IM}{IN} = k, k \neq 0$ cho trước.

Bài tập 11: Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b, c lần lượt lấy ba điểm A', B', C' tuỳ ý.

a. Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng (A'B'C').

b. Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành .

Bài tập 12: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho MC = 2AM; NF = 2BN. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1 và N_1. Chứng minh rằng:

a. MN // DE.

b. M_1N_1 // (DEF).

c. (MNN_1M_1) // (DEF).

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang có các cạnh đáy AB, CD với CD = p.AB (0 < p < 1). S_0 là diện tích tam giác SAB. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AD và song song với mặt phẳng (SAB). Đặt $\frac{DM}{AD} = x$, với $0 < x < 1$.

a. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo S_0, p, x.

b. Tính x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB.

Bài tập 14: Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).

a. Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

CHỦ ĐỀ 6

HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

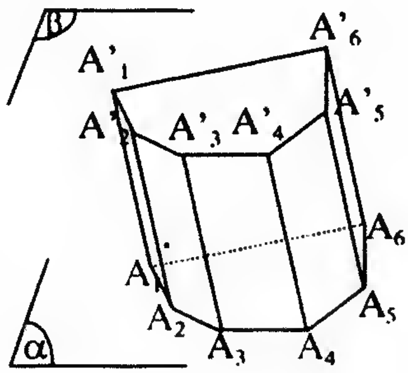
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÌNH LĂNG TRỤ

Định nghĩa: *Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.*

Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Tuỳ theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...



Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

b. Các mặt bên và các các mặt chéo là những hình bình hành.

c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

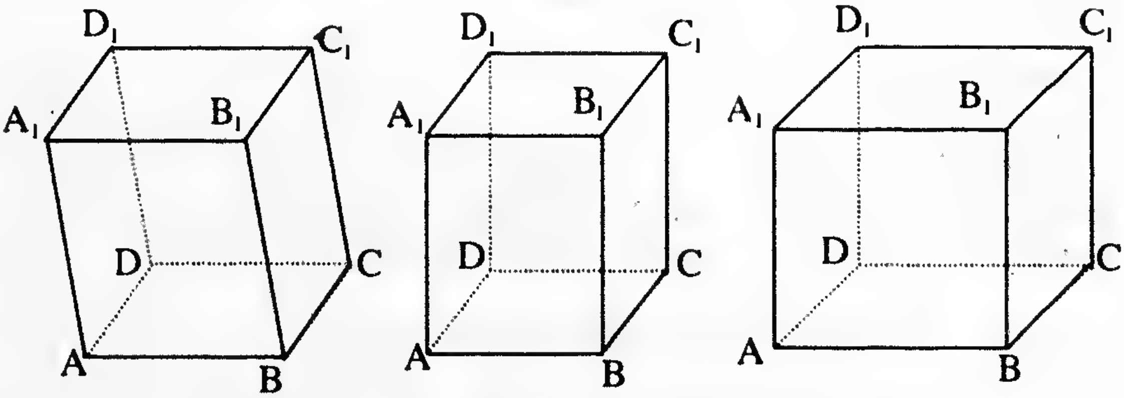
2. HÌNH HỘP

Định nghĩa:

a. *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.*

b. *Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.*

c. *Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*



Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng tính chất của hình lăng trụ - Thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình chóp. Lưu ý rằng " *Hai đáy hình lăng trụ song song, do đó giao tuyến của mặt phẳng cắt 2 mặt đó, nếu có, là hai đoạn thẳng song song* ".

Ví dụ 1: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng $AM // A_1M_1$.
b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB_1C_1) với đường thẳng A_1M.
c. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (BA_1C_1).
d. Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMA_1). Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔAB_1C_1.

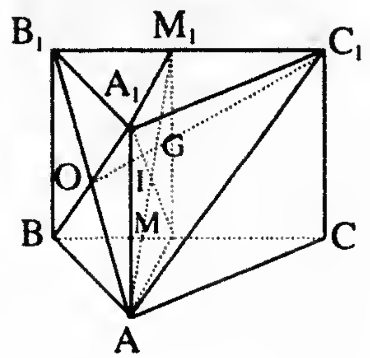
Giải

a. Từ giả thiết, ta được:

$$MM_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} AA_1$$

$\Leftrightarrow AMM_1A_1$ là hình bình hành

$\Rightarrow AM // A_1M_1$.



b. Chọn mặt phẳng phụ (AMM_1A_1) chứa A_1M.

Nhận xét rằng:

$(AMM_1A_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap A_1M = I$

suy ra $A_1M \cap (AB_1C_1) = I$.

c. Gọi $O = AB_1 \cap A_1B$, khi đó ta nhận được:

$(AB_1C_1) \cap (BA_1C_1) = OC_1$, chính là đường thẳng d cần tìm.

d. Chọn mặt phẳng phụ (AB_1C_1) chứa d (chứa OC_1).

Nhận xét rằng:

$(AMA_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap OC_1 = G$

suy ra $d \cap (AMA_1) = G$.

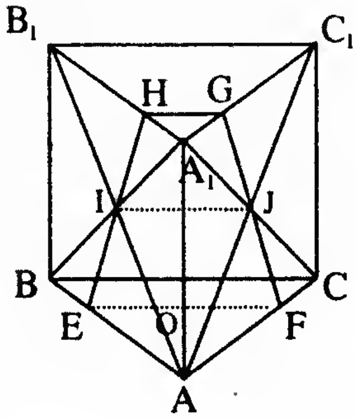
Dễ thấy G là trọng tâm ΔAB_1C_1, bởi trong ΔAB_1C_1 thì G là giao điểm của hai đường trung tuyến.

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB_1A_1, ACC_1A_1 là hình vuông. Gọi I, J là tâm các mặt bên nói trên và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC).

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO). Chứng minh thiết diện là thang cân. Tính diện tích của nó theo a.

Giải



a. Nhận xét rằng:

$$\frac{IA_1}{IB} = \frac{JA_1}{JC} = 1$$

$$\Rightarrow IJ // BC \subset (ABC) \Rightarrow IJ // (ABC).$$

b. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} IJ \in (IJO) \text{ và } BC \in (ABC) \\ IJ // BC \\ (IJO) \cap (ABC) = Ox \end{cases} \Rightarrow Ox // IJ // BC.$$

và Ox cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Nối EI cắt A_1B_1 tại H và nối FI cắt A_1C_1 tại G. Như vậy, thiết diện là tứ giác EFGH.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ABC) // (A_1B_1C_1) \\ (IJO) \cap (ABC) = EF \\ (IJO) \cap (A_1B_1C_1) = GH \end{cases} \Rightarrow EF // GH \Rightarrow EFGH \text{ là hình thang.}$$

Vì ΔABC nên $AA_1B_1B = AA_1C_1C$, do đó EH = FG.

Vậy, thiết diện EFGH là hình thang cân.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}.$$

- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$\frac{HG}{B_1C_1} = \frac{A_1H}{A_1B_1} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG = \frac{a}{3}.$$

- Trong ΔIBE, ta có:

$$IE^2 = BI^2 + BE^2 - 2BI.BE.\cos\widehat{IBE}$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3}.\cos 45^0 = \frac{5a^2}{18}$$

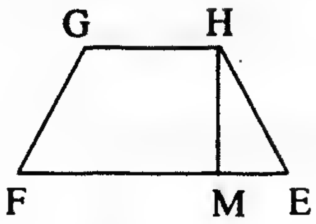
$$\Rightarrow IE = \frac{a\sqrt{10}}{6} \Rightarrow EH = 2IE = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Khi đó, xét hình thang cân EFGH, hạ đường cao HM, ta có:

$$HM = \sqrt{EH^2 - ME^2} = \sqrt{EH^2 - \left(\frac{EF - HG}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + HG).HM$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$



Chú ý: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a), chúng ta có thể sử dụng nhận xét:

   IJ là đường trung bình của $\Delta A_1BC \Leftrightarrow IJ \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC$ (ta có $IJ = \frac{a}{2}$).

2. Khi đó, trong câu b), chúng ta có thể tính độ dài HG dựa trên tính chất IJ là đường trung bình của hình thang EFGH như sau:

$$IJ = \frac{1}{2}(EF + HG) \Rightarrow HG = 2IJ - EF = 2.\frac{a}{2} - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Bài toán 2: Sử dụng tính chất của hình hộp - Thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình lăng trụ.

Ví dụ 1: Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$.

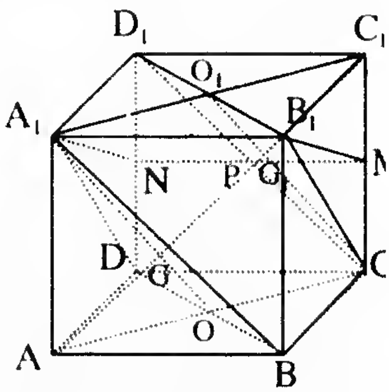
a. Chứng minh rằng $(BDA_1) // (B_1D_1C)$.

b. Chứng minh đường chéo AC_1 đi qua các trọng tâm G, G_1 của ΔA_1BD và ΔCB_1D_1 và G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A_1B_1G_1)$ với hình hộp đã cho. Thiết diện là hình gì ?

d. Gọi O, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và BCC_1B_1. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (A_1OK) với hình hộp đã cho.

Giải



a. Gọi O, O_1 theo thứ tự là tâm của các hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$, ta có:

$$\begin{cases} A_1O // CO_1 \\ BD // B_1D_1 \end{cases} \Rightarrow (BDA_1) // (B_1D_1C).$$

b. Vì AC_1, AO, CO_1 cùng nằm trong mặt phẳng (ACC_1A_1) nên gọi:

$$G = AC_1 \cap A_1O \text{ và } G_1 = AC_1 \cap CO_1.$$

- Trong ΔA_1BD, điểm G thuộc trung tuyến A_1O và vì AO // A_1C_1 nên:

$$\frac{GO}{GA_1} = \frac{AO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$$

do đó, G là trọng tâm ΔA_1BD.

- Chứng minh tương tự G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Nhận xét rằng OG, O_1G_1 theo thứ tự là đường trung bình của ΔACG_1 và ΔA_1C_1G nên ta có:

$$AG = GG_1 = G_1C_1$$

tức là G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Kéo dài B_1G_1 cắt CD_1 tại P, ta có P là trung điểm của CD_1 vì G_1 là trọng tâm của ΔCB_1D_1.

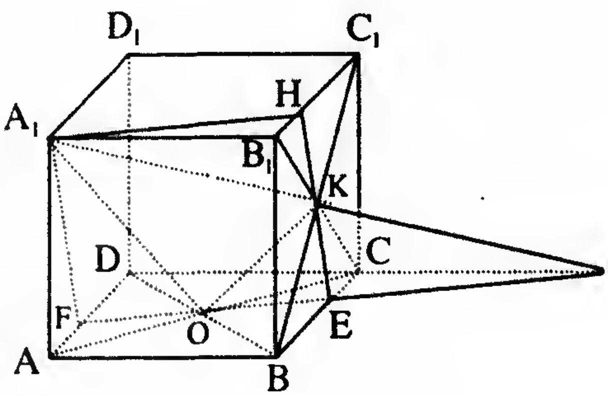
Ta có:

$$\begin{cases} A_1B_1 \in (A_1B_1G_1) \text{ và } C_1D_1 \in (CDD_1C_1) \\ A_1B_1 // C_1D_1 \\ (A_1B_1G_1) \cap (CDD_1C_1) = Px \end{cases} \Rightarrow Px // A_1B_1 // C_1D_1$$

giả sử Px theo thứ tự cắt CC_1 và DD_1 tại M và N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện A_1B_1MN là hình bình hành.

d. Ta lần lượt có:



- Trong (A_1B_1CD) giả sử:

$$A_1K \cap DC = I.$$

- Nối IO cắt BC và AD theo thứ tự tại E và F.

- Nối KE cắt B_1C_1 tại H.

Nối A_1F và A_1H nhận được thiết diện A_1FEH là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B_1C_1 và DD_1.

a. Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

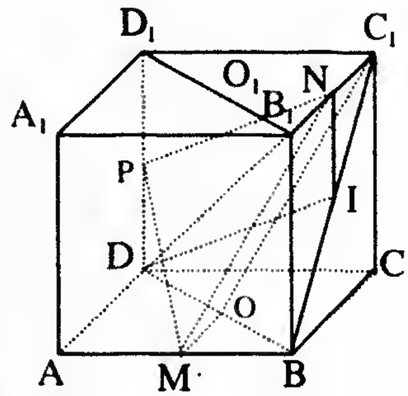
b. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của nó.

Giải

a. Gọi O, O_1, I theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ và BCC_1B_1.

Nhận xét rằng:

$$MO \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1D_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}B_1C_1 \overset{//}{=} NC_1$$



$\Leftrightarrow MOC_1N$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN \,//\, OC_1$. (1)

$$NI \overset{//}{=} \frac{1}{2}BB_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}AA_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}DD_1 \overset{//}{=} PD$$

$\Leftrightarrow$ NIDP là hình bình hành

$\Rightarrow PN \,//\, DI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \,//\, (BDC_1)$.

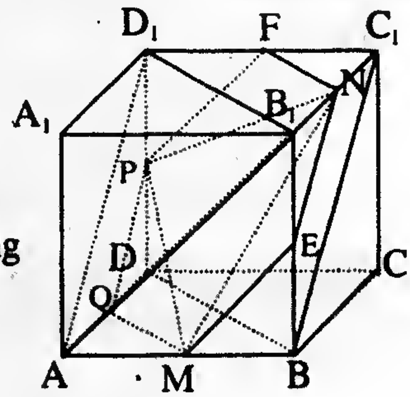
Mặt khác:

$$\begin{cases} AO_1 \,//\, C_1O \\ B_1D_1 \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow (AB_1D_1) \,//\, (BDC_1).$$

Vậy, (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Từ kết quả câu a), ta nhận xét:

$$\begin{cases} (AB_1D_1) // (MNP) \\ (AB_1D_1) \cap (A_1B_1C_1D_1) = B_1D_1 \\ (MNP) \cap (A_1B_1C_1D_1) = Nx \end{cases}$$



suy ra Nx song song với B_1D_1 và cắt C_1D_1 tại F là trung điểm của C_1D_1.

$$\begin{cases} (C_1BD) // (MNP) \\ (C_1BD) \cap (ABCD) = BD \\ (MNP) \cap (ABCD) = My \end{cases}$$

suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A_1B_1 tai G, nối GM cắt BB_1 tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác MENFPQ.

Dựa theo tính chất đường trung bình ta thấy ngay MENFPQ là lục giác đều có độ dài cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $S_{MENPQ} = 6.\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho. Thiết diện là hình gì ?

Bài tập 2: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a. Chứng minh rằng đường thẳng B'C song song với mặt phẳng (AHC').

b. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (A'B'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mặt phẳng (BB'C'C).

c. Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng (H, d).

Bài tập 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M là trung điểm của trung tuyến AI của đáy ABC. α là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AC_1 và B_1C. Xác định thiết diện của lăng trụ đã cho với α và tìm tỉ số mà thiết diện chia cạnh CC_1.

Bài tập 4: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng:

a. GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b. G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

c. $G_1G' = \dfrac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$, $G_1G = \dfrac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

Bài tập 6: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (BDA') // (B'D'C).

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Chứng minh rằng G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d. Chứng minh rằng các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng.

Bài tập 7: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'.

a. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C') song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' di qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d. Chứng minh rằng các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng.

e. Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và AA'C'C. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp đã cho.

Bài tập 8: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt CDD'C'.

Bài tập 9: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a. Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

b. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

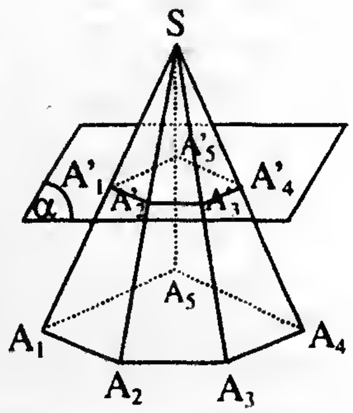
CHỦ ĐỀ 7

HÌNH CHÓP CỤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng α song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n theo thứ tự tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một *hình chóp cụt*.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...$A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

2. TÍNH CHẤT

Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Cách cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

Chứng minh

1. Vì α // $(A_1A_2...A_n)$ nên (theo định lí " *Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bở một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau*"):

A_1A_2 // $A'_1A'_2$,

A_2A_3 // $A'_2A'_3$,

...

$A_{n-1}A_n$ // $A'_{n-1}A'_n$,

nên hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ đồng dạng với nhau.

2. Lập luận như 1) ta thấy ngay các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm theo định nghĩa.

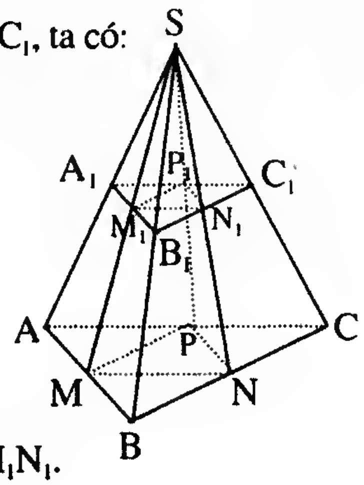
II. VÍ DỤ MINH HOẠ

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp cụt $ABC.A_1B_1C_1$ trong đó ABC là đáy lớn. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, BC, CA và M_1, N_1, P_1 theo thứ tự là trung điểm A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

a. Chứng minh rằng các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy.

b. Chứng minh rằng MN // M_1N_1, NP // N_1P_1, PM // P_1M_1.

Giải



a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, ta có:

AB // A_1B_1

M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1B_1

suy ra $S \in MM_1$.

Tương tự, ta cũng có $S \in NN_1$ và $S \in PP_1$.

Vậy, các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại S.

b. Theo tính chất đường trung bình, ta có:

MN // AC

M_1N_1 // A_1C_1

ngoài ra, theo tính chất hình chóp cụt AC // A_1C_1 nên MN // M_1N_1.

Tương tự, ta cũng có NP // N_1P_1, PM // P_1M_1.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C' có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'C', C'A'. Chứng minh MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABCD) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh :

a. B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD.

b. $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$.

c. Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD.

Bài tập 3: Cho hình chóp cụt $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ trong đó ABCD là đáy lớn có diện tích bằng s_1 và $A_1B_1C_1D_1$ là đáy nhỏ có diện tích bằng s_2.

a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$

b. Gọi M là trung điểm AA_1, mặt phẳng α qua M và song song với mặt phẳng đáy (ABCD). Xác định thiết diện của hình chóp cụt với mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo s_1 và s_2.

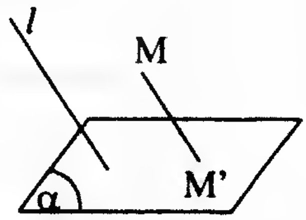
CHỦ ĐỀ 8
PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng α và một đường thẳng *l* không song song với α.

Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với *l* sẽ cắt α tại điểm M'. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng α theo phương *l*.



Mặt phẳng α gọi là *mặt phẳng chiếu*.

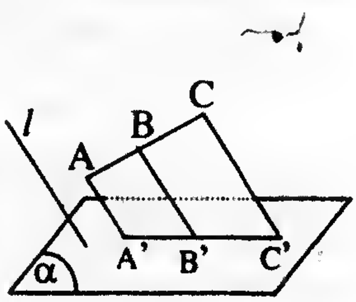
Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên α được gọi là *phép chiếu song song lên mặt phẳng α theo phương l*.

Chú ý: Nếu a // *l* thì hình chiếu của a lên α là một điểm trên α (chính là giao điểm của a với α), do vậy các tính chất trong phần sau chỉ xét những đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song với *l*.

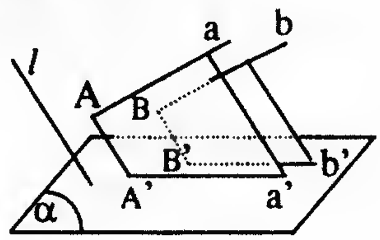
2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

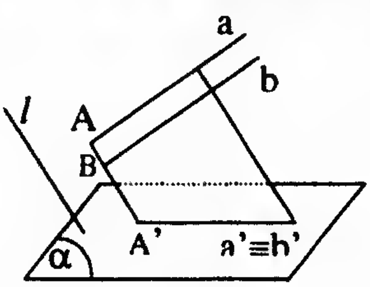
Định lí 1: *Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*

Hệ quả: *Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.*



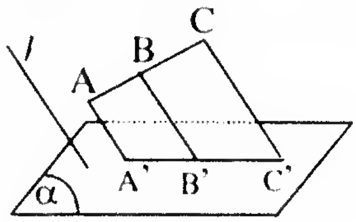
Định lí 2: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*





***Hệ quả**: Hình chiếu song song của một hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu là một hình bình hành.*

***Định lí 3**: Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*



Tức là:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng*.

***Định nghĩa**: Hình biểu diễn của một hình* H *trong không gian là hình chiếu song song của* H *lên một mặt phẳng nào đó* theo một phương chiếu nào đó.

Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn

1. *Hình biểu diễn phải đúng*: Để vẽ đúng chúng ta cần quan tâm tới các yếu tố được bảo toàn sau:
   a. Sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên một đường thẳng.
   b. Sự song song của các đường thẳng, các tia hoặc các đoạn thẳng.
   c. Tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng phương.
   Như vậy, *các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều được giữa nguyên trên hình biểu diễn.*
2. *Hình biểu diễn phải nổi*: Giúp chúng ta dễ tưởng tượng.

Chúng ta có:

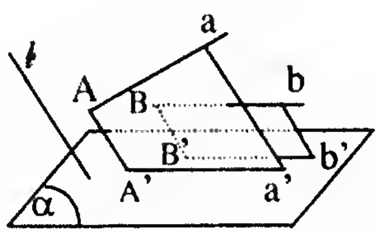
- ***Tam giác***: Một ΔABC có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác bất kì (đều, cân, vuông).
- ***Hình bình hành***: Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của các loại hình bình hành như hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi và hình bình hành bất kì.
- ***Đường tròn***: Để biểu diễn dường tròn chúng ta sử dụng một hình Elíp.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không ?

Giải

Từ hình vẽ, ta thấy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau a và b theo phương chiếu l trên mặt phẳng α có thể song song với nhau. Trường hợp này xảy ra khi " *Mặt phẳng β song song với a và b sẽ chứa l hoặc song song với l* ".



Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh hình chiếu song song K của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm ΔBCD.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N, P trong phép chiếu song song ở câu a).

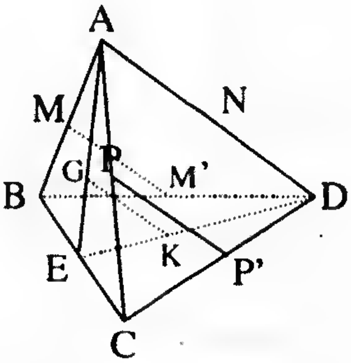
Giải

a. Từ giả thiết, ta được:

GK // AD,

AG ∩ DK = E là trung điểm BC,

suy ra: $\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2}$ ⇒ K là trọng tâm ΔBCD.



b. Ta lần lượt thực hiện:

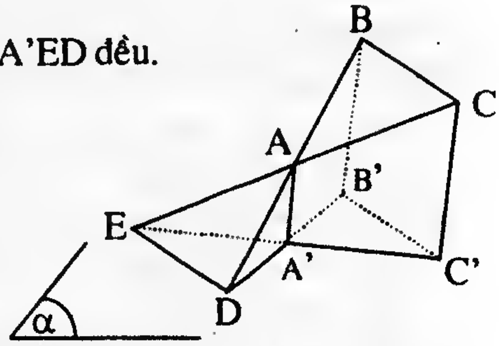
- Trong (ABD) dựng Mx song song với AD và cắt BD tại M', khi đó M' chính là hình chiếu song song của điểm M trong phép chiếu song song ở câu a).
- Vì N thuộc AD nên D chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).
- Trong (ACD) dựng Ny song song với AD và cắt CD tại N', khi đó N' chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).

Ví dụ 3: Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài mặt phẳng α. Giả sử BC song song với α, còn AB và AC cắt α lần lượt tại D và E. Hãy chọn phương chiếu *l* sao cho hình chiếu của tam giác ABC trên α theo phương *l* là một tam giác đều.

Giải

Thực hiện cách dựng:

- Trong mặt phẳng α, dựng điểm A' sao cho ΔA'ED đều.
- Dựng hình chiếu B', C' của B và C trên mặt phẳng α theo phương chiếu AA'.



Ta đi chứng minh ΔA'B'C' là tam giác đều.

Thật vậy, ta có ngay:

E, A', C' thẳng hàng

D, A', B' thẳng hàng

ED // B'C'

suy ra ΔA'DE và ΔA'B'C' đồng dạng, tức là ΔA'B'C' là tam giác đều.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Vẽ hình biểu diễn:

a. Một tứ diện và trọng tâm của nó.

b. Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

c. Một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

d. Một lục giác đều.

Bài tập 2: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.

c. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
d. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

Bài tập 3: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì cắt nhau.
c. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng với nhau.
d. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó.
e. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.
f. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

Bài tập 4: Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm ΔABC có hình chiếu song song là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

a. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó.
b. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.
c. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.
d. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.
e. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tìm điểm i trên đường chéo B'D và điểm J trên đường chéo AC sao cho IJ // BC'. Tính tỉ số $\dfrac{ID}{IB'}$.

Bài tập 5: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho IJ // BC_1. Tính tỉ số $\dfrac{ID}{IB_1}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài tập 1: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng α qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MN, PQ, BC đồng qui hoặc song song.
b. Đặt AM = x, AN = y. Chứng minh rằng $a(x + y) = 3xy$.
c. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a, x và y.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. SA = SB = SC = SD = a. Gọi M là một điểm trên đoạn AO; α là mặt phẳng qua M và song song với AD và SO. Đặt $\dfrac{AM}{AO} = k$, với $0 < k < 1$.

a. Chứng minh thiết diện của hình chóp đã cho cắt bởi α là hình thang cân.
b. Tính các cạnh của thiết diện theo a và k.
c. Tìm k để thiết diện trên ngoại tiếp được một đường tròn. Trong trường hợp này hãy tính diện tích thiết diện theo a.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABC, O là một điểm bên trong tam giác ABC. Qua O vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự tại A', B', C'.

a. Chỉ cách dựng các điểm A', B', C'.
b. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ có giá trị không đổi khi O di động trong tam giác ABC.
c. Định O để OA'.OB'.OC' có giá trị lớn nhất.

Bài tập 4: Cho hình hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang với AD // BC. M là một điểm di động bên trong tứ giác ABCD. Qua M vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB cắt các mặt phẳng (SBC) và (SAD) theo thứ tự tại N và P.

a. Nêu cách dựng các điểm N, P.

b. Chứng minh $\frac{MN}{SA}+\frac{MP}{SB}$ không đổi.

c. Tìm tập hợp điểm M sao cho diện tích tam giác MNP có giá trị lớn nhất.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, AC và BC cắt nhau tại G. α là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.

a. Tìm giao điểm D' của SD với α.

b. Tìm điều kiện của α để A'B'// C'D'.

c. Với điều kiện nào của α thì A'B'C'D' là hình hành? Chứng minh rằng khi đó $\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}=\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}$.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. M và P là 2 điểm lần lượt di động trên AD và SC sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{PS}{PC}=x>0$.

a. Chứng minh rằng MP luôn luôn song song với một mặt phẳng α cố định.

b. Tìm giao điểm I của mặt phẳng (SBD) với MP.

c. Mặt phẳng qua M và song song với α cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện và cắt BD tại J. Chứng minh IJ có phương không đổi.

d. Định x để diện tích thiết diện bằng k lần diện tích ΔSAB, với k dương cho trước.

Bài tập 7: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn AB', AC' và B'C sao cho $\frac{AM}{AB'}=\frac{C'N}{AC'}=\frac{CP}{CB'}=x$.

a. Định x để (MNP) // (A'BC'). Khi đó hãy tính diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP), biết tam giác A'BC' là tam giác đều cạnh a.

b. Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

Bài tập 8: Cho mặt phẳng α và 2 đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt α tại A, B. (Δ) là dường thẳng thay đổi luôn luôn song song với α, cắt d_1 tại M, d_2 tại N. Đường thẳng qua N và song song với d_1 cắt α tại N'.

a. Tứ giác AMNN' là hình gì ? tìm tập hợp điểm N'.

b. Xác định vị trí của (Δ) để MN có độ dài nhỏ nhất.

c. Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng cố định khi M di động.

d. ΔBMN vuông cân tại B và BM = a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp B.AMNN' với mặt phẳng qua O và song song mặt phẳng (BMN).

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

CHỦ ĐỀ 1
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng có các tính chất đã biết.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Trọng tâm của tứ diện: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

2. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ. ĐIỀU KIỆN ĐỂ BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

Định nghĩa: *Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.*

Định lí 1 (*Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng*): *Cho hai vectơ không cùng phương* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Khi đó ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng khi và chỉ khi có các số* m, n *sao cho* $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. *Hơn nữa, các số* m, n *là duy nhất.*

Định lí 2: *Nếu ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *và* $\vec{c}$ *không đồng phẳng thì với vectơ* $\vec{d}$ *bất kì, ta đều tìm được các số* m, n, p *sao cho* $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. *Hơn nữa, các số* m, n, p *là duy nhất.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh một đẳng thức vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

- *Quy tắc ba điểm*: Ta có:

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, xen điểm C.

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.

- *Quy tắc hình bình hành*: Với hình bình hành ABCD luôn có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

- *Quy tắc hình hộp*: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$

- *Quy tắc trung điểm*: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

- *Trọng tâm của tam giác*: Điểm G là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

- *Trọng tâm của tứ diện*: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

Để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh.

Và khi đó, ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

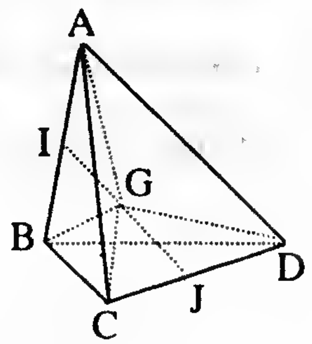
Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

Ví dụ 1: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD, chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \text{ với mọi điểm M.}$$

Giải



Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, sử dụng quy tắc ba điểm bằng cách xen vào giữa, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}, \quad \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD},$$

suy ra:

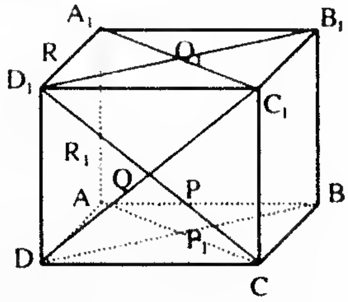
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$
$$= 4\overrightarrow{MG}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi P, R theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1D_1, gọi P_1, Q, Q_1, R_1 theo thứ tự là giao điểm của các đường chéo của các mặt ABCD, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \vec{0}$.

b. Chứng minh hai tam giác PQR và $P_1Q_1R_1$ có trọng tâm trùng nhau.

Giải



a. Ta có:

$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{QQ_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1},$$

$$\overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B},$$

suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1B}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

b. Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác PQR và $P_1Q_1R_1$, ta có:

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1P_1}, \quad \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1Q_1},$$

$$\overrightarrow{RR_1} = \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1R_1},$$

suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{RG}) + 3\overrightarrow{GG_1} + $$

$$+ (\overrightarrow{G_1P_1} + \overrightarrow{G_1Q_1} + \overrightarrow{G_1R_1})$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = 3\overrightarrow{GG_1} \Leftrightarrow G \equiv G_1.$$

Bài toán 2: Xét tính đồng phẳng, không đồng phẳng của ba vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, ta đi chứng minh tồn tại cặp số thực m, n, sao cho:

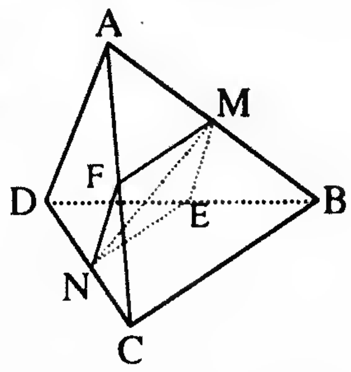
$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}. \qquad (1)$$

Chú ý: Trong trường hợp bài toán yêu cầu xác định điều kiện của tham số để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ta sẽ xuất phát từ điều kiện (1).

2. Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, ta đi chứng minh:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0.$$

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.



Giải

Từ giả thiết, ta có:

$$1 = \frac{AM}{BM} = \frac{DN}{CN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{DC}$$

$\Rightarrow$ BC, MN, AD nằm trên ba mặt phẳng song song

$\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC. Ba điểm M, N, P trong không gian thoả mãn:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{ON} = (t+1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OP} = (t-2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC},\ t \in \mathbb{R}.$$

a. Xác định t để ba vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng.

b. Cho t = 0, hãy biểu diễn vectơ $\vec{v} = 5\overrightarrow{OA} + 10\overrightarrow{OB} - 15\overrightarrow{OC}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$.

Giải

a. Để $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng điều kiện là tồn tại cặp số thực α, β, sao cho:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON} + \beta\overrightarrow{OP}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = \alpha[(t+1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}] + \beta[(t-2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}]$$
$$= \alpha(t+1)\overrightarrow{OA} + [2\alpha + \beta(t-2)]\overrightarrow{OB} + (\alpha + 2\beta)\overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha(t+1) \\ t = 2\alpha + \beta(t-2) \\ -2 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow 4t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}.$$

Vậy, với $t = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}$ thì $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng.

b. Với t = 0, ta được:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC}, \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \qquad (2)$$
$$\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}. \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) theo các ẩn $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ta được:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}),$$
$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{10}(-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}),$$
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{5}(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}),$$

suy ra:

$$\vec{v} = (3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}) + (-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}) - 3(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$$
$$= 4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OP}.$$

Bài toán 3: Biểu diễn một vectơ thành tổ hợp vectơ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

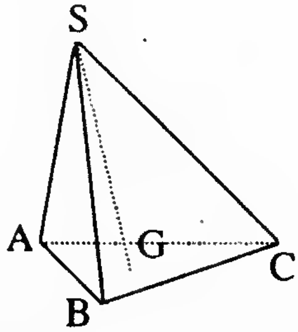
Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC. Đáy ABC có trọng tâm G. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{SA}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{BC}$.

Giải



Ta có:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GA},$$
$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GC},$$

suy ra:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{SG}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= 3\overrightarrow{SG} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BC}.$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn:

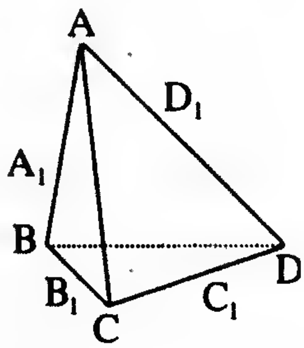
$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B}, \qquad \overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C},$$
$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D}, \qquad \overrightarrow{D_1D} = -2\overrightarrow{D_1A}.$$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Giải

Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B} = -2(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\vec{i}.$$



$$\overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C} \Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = -2(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}).$$
$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D} \Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} = -2(\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AD})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}).$$
$$-2\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{k}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{B_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{C_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{D_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Tổng quát hoá: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{A_1A} = t\overrightarrow{A_1B},\ \overrightarrow{B_1B} = t\overrightarrow{B_1C},\ \overrightarrow{C_1C} = t\overrightarrow{C_1D},\ \overrightarrow{D_1D} = t\overrightarrow{D_1A}.$$

với $t \neq 0, 1$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Bằng phương pháp tương tự như đã trình bày trong lời giải trên, chúng ta sẽ nhận được kết quả:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1+t}{1-t}\vec{i} - \frac{t}{1-t}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{j} - \frac{t}{1-t}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{k}.$$

Bài toán 4: Xác định điểm M thoả một đẳng thức vectơ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng

   $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

__Ví dụ 1:__ Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

b. Xác định vị trí của điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}.$$

c. Chứng minh rằng khi đó với mọi điểm M trong không gian ta luôn có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = 8\overrightarrow{MO}.$$

Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AC}.$$

b. Gọi O là giao điểm của AC_1 và A_1C, ta có ngay:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} =$$

$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_1}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB_1}) = \vec{0}$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} =$$

$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) +$$

$$+ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD_1}$$

$$= 8\,\overrightarrow{MO}.$$

Bài toán 5: Tìm quỹ tích điểm M thoả mãn điều kiện K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc mặt phẳng trun trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc mặt cầu tâm C bán kính bằng k.AB.
3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì:
   - Với $k \in \mathbf{R}$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
   - Với $k \in \mathbf{R}^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với B(theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
   - Với $k \in \mathbf{R}^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với B(ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

__Ví dụ 1:__ Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|. \qquad (1)$$

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta biến đổi được (1) về dạng:

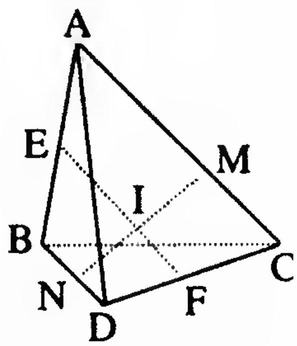
$$|3\overrightarrow{MG}| = |3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{GA}|$$

⇔ M thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA.

__Ví dụ 2:__ Cho tứ diện ABCD, hai điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

Chứng tỏ rằng khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên một đường thẳng cố định.



Giải

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB}$$

$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB},$$

$$2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND},$$

suy ra:

$$2(\overrightarrow{IE} + t\overrightarrow{IF}) = \overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow I \in EF.$$

Vậy, khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường thẳng EF

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trong không gian, cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ theo thứ tự có các trọng tâm là G và G_1. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{GG_1}.$$

Bài 2. Cho tứ diện ABCD.

a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

b. Gọi E, F là hai điểm thoả mãn $\overrightarrow{EA} = t\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC} = t\overrightarrow{FD}$, với $t \neq 0, 1$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{BD} + (1-t)\overrightarrow{EF}.$$

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi E là trọng tâm ΔBCD, I, I_1, J, J_1, K, K_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, CA, BD, AD, BC. Điểm G thoả mãn hệ thức:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1} = 2\overrightarrow{AG}$.

b. $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

Bài 4. Cho hành hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, gọi I là giao điểm của AC_1 với mặt phẳng (BDA_1). Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{CC_1}$.

c. $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KA_1} = \vec{0}$.

Bài 5. Cho tứ diện ABCD, lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Giả sử tồn tại điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}}.$$

Bài 6. Trong không gian cho ΔABC.

a. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) thì có ba số x, y, z mà x + y + z = 1 sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

b. Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó x + y + z = 1 thì điểm M thuộc mặt phẳng (ABC).

Bài 7. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ khác vectơ không.

a. Nếu $\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c} = \vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không ?

b. Giả sử ta có:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Với điều kiện nào của α, β, γ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

- Đồng phẳng.
- Không đồng phẳng.

Bài 8. Cho tứ diện OABC, đặt:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}, \qquad \vec{b} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC},$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + t^2\overrightarrow{OC}.$$

Xác định t để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Bài 9. Trong không gian, cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. O là điểm bất kỳ, Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại bốn số α, β, γ, η sao cho:

$$\begin{cases}\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \eta\overrightarrow{OD} = \vec{0}\\ \alpha + \beta + \gamma + \eta = 0\end{cases}.$$

Bài 10. Cho tứ diện OABC, gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thuộc AB, BC, CD, DA sao cho:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = t.$$

a. Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ trong không gian ta luôn có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

b. Xác định giá trị của t để bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng.

Bài 11. Cho tứ diện ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC, đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Bài 12. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tâm O, gọi I là tâm của mặt CDD_1C_1. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AI}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

Bài 13. Cho tứ diện vuông OABC, vuông tại O và OA=OB=OC. Điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{OM}|$=OA, nửa đường thẳng OM tạo với tia OC một góc bằng 45^0 và tạo với hai tia OA, OB thành hai góc nhọn bằng nhau. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Bài 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đặt $\overrightarrow{B_1A_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{j}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{k}$. M, N là hai điểm theo thứ tự thuộc AC_1, CD_1 và thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA} = \alpha\,\overrightarrow{MC_1},\ \overrightarrow{NC} = \beta\,\overrightarrow{ND_1}.$$

a. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{B_1M}$, $\overrightarrow{B_1N}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và α, β.

b. Xác định α, β đrr $MN//B_1D$.

c. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Bài 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng hình hộp này là hình hộp chữ nhật khi và chỉ khi:

$$|\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$$
$$= |\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$$
$$= |\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|.$$

Bài 16. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm G sao cho:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng tỏ rằng điểm G đó là duy nhất và khi đó G gọi là *trọng tâm của tứ diện ABCD.*

Bài 17. Cho hình chóp SABCD. Tìm điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}.$$

Bài 18. Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, M là điểm di động.

a. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ là một vectơ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b. M_0 là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AM_0} = \vec{v}$ và giả sử đường thẳng AM_0 cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{NC}$.

c. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với $\vec{v}$. Chứng tỏ rằng khi M di chuyển trong mặt phẳng (P) thì tổng sau có giá trị không đổi:

$$S = 2MA^2 + MB^2 - 3MC^2.$$

Bài 19. Cho tứ diện ABCD. Gọi E là trọng tâm ΔBCD, I, I_1, J, J_1, K, K_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, CA, BD, AD, BC. Điểm G thoả mãn hệ thức:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{II_1} + \overrightarrow{JJ_1} + \overrightarrow{KK_1} = 2\overrightarrow{AG}$.

b. Ba điểm A, E, G thẳng hàng.

Bài 20. Cho ba tia Ax, By, Cz song song, cùng hướng và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N, P là ba điểm di động theo thứ tự trên các tia Ax, By, Cz sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CP}$.

a. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

b. Tìm tập hợp trọng tâm G của ΔMNP.

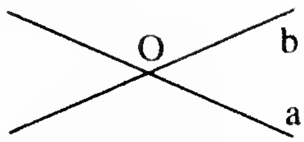
CHỦ ĐỀ 2

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Chúng tạo thành bốn góc



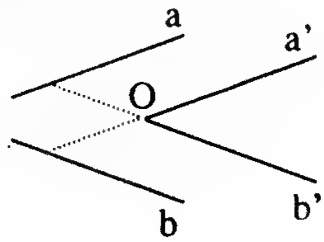
Định nghĩa: Số đo của góc nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là *số đo của góc hợp bởi hai đường thẳng a, b* hay đơn giản là *góc giữa hai đường thẳng a và b*, kí hiệu là (a, b) hay (b, a).

Đặc biệt:

- Khi a và b trùng nhau thì $(a, b) = 0^0$.
- Khi a và b vuông góc thì $(a, b) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (a, b) \le 90^0$.

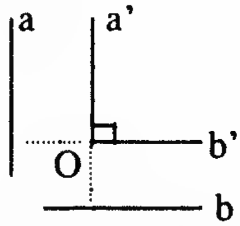
2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN



Định nghĩa: *Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a', b' lần lượt song song với a và b*, kí hiệu là (a, b) hay (b, a).

Chú ý: Để xác định (a, b) ta có thể lấy điểm O nằm ngay trên một trong hai đường thẳng đó.

3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC



Định nghĩa: *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.*

Như vậy:

$$a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^0.$$

4. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA HA ĐƯỜNG THẲNG

Định lí: *Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đườn thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai.*

Tức là:

$$\begin{cases} a \,//\, b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

Chú ý:

1. Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc thì hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.
2. Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thi ba thì song song với nhau, nhưng trong không gian thì không còn đúng.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Tìm góc* bằng việc lấy một điểm O nào đó (thông thường $O \in a$ hoặc $O \in b$). Qua O dựng a' và b' theo thứ tự song song với a và b.

Khi đó, góc nhọn hoặc vuông tạo bởi a' và b' là góc giữa a và b.

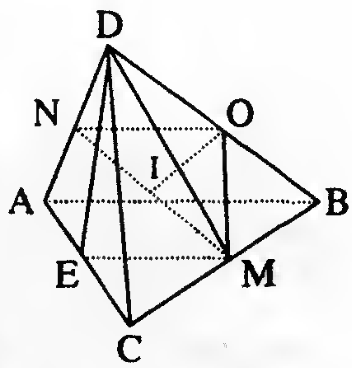
Bước 2: *Tính góc*: Sử dụng tỷ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí hàm số côsin trong tam giác thường để xác định số đo góc giữa a' và b'.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{3}$.

Giải



a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có:

$$EM \,//\, AB \text{ và } EM = \frac{a}{2}.$$

do đó (AB, DM) = (MD, ME).

Xét ΔDEM, ta có:

$$DM = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ trung tuyến trong tam giác đều}$$

$$\cos\widehat{DME} = \frac{DM^2 + EM^2 - DE^2}{2DM.EM} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy, ta được $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

b. Gọi O là trung điểm của BD, ta có:

ON // AB và ON = a

OM // CD và OM = a

do đó (AB, CD) = (OM, ON).

Gọi I là trung điểm MN, trong ΔIME vuông tại I, ta có:

$$\sin\widehat{MOI} = \frac{IM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MOI} = 60^0$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 120^0 \Rightarrow (OM, ON) = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Vậy, ta được $(AB, CD) = 60^0$.

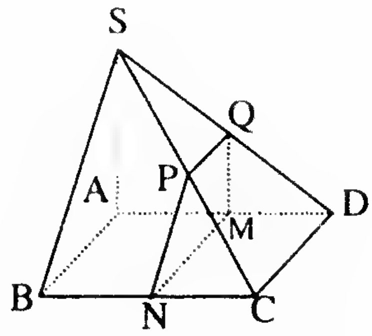
__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, SAB là tam giác vuông cân tại A. M là điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng α qua M song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông.

b. Đặt AM = x. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

Giải

a. Ta có:



$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (SAD) = MQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow MQ // SA. \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (ABCD) = MN \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow MN // AB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NMQ} = 90^0$.

Mặt khác, ba mặt phẳng (ABCD), (SCD) và α cắt nhau theo ba giao tuyến MN, CD, PQ có:

$$MN // CD \Rightarrow MN // PQ \Rightarrow \text{MNPQ là hình thang vuông.}$$

b. Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ. \quad (3)$$

Ta có ngay MN = AB = a. (4)

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{AD - AM}{DA} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a - x}{2}. \quad (5)$$

Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{2a} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2}. \quad (6)$$

Thay (4), (5), (6) vào (3), ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{2})\frac{2a - x}{2} = \frac{1}{8}(4a^2 - x^2).$$

Bài toán 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh a vuông góc với b, ta lựa chọn theo hướng:

Hướng 1: Chứng minh $(a, b) = 90^0$.

Hướng 2: Sử dụng kết quả về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của hai đường thẳng.

Ví dụ 1: Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoài tiếp ΔBCD.

a. Chứng minh rằng AO vuông góc với CD.

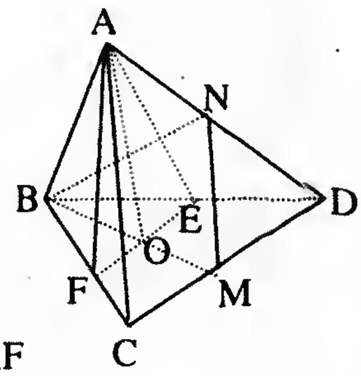
b. Gọi M là trung điểm CD. Tính góc giữa AC và BM.

Giải

a. Qua O dựng đường thẳng song song với CD, cắt BC, BD theo thứ tự tại E và F, suy ra:

$(AO, CD) = \widehat{AOF}$.

Ta có:



$$\begin{cases} EF // CD \\ BC = BD \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BF \\ OE = OF \end{cases}.$$

Xét hai tam giác ΔABE và ΔABF, ta có:

$$\begin{cases} BE = BF \\ AB \text{ chung} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF \Rightarrow AE = AF$$

$\Leftrightarrow \Delta AEF$ cân tại A $\Rightarrow AO \perp EF \Leftrightarrow \widehat{AOF} = 90^0 \Leftrightarrow AO \perp CD$.

b. *Học sinh tự làm* – Đáp số $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

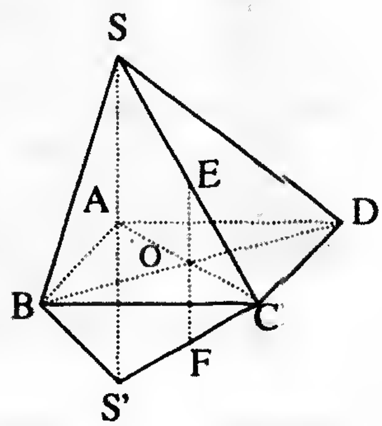
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

a. Chứng minh rằng SA vuông góc với BC và CD.

b. Chứng minh rằng SA vuông góc với AC và BD.

Giải

a. Ta có:



$$\begin{cases} BC // AD \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA.$$

$$\begin{cases} CD // AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SA.$$

b. Trên tia SA lấy điểm S' sao cho AS = AS', ta có:

AB, AD đều là trung trực của SS'

$\Rightarrow BS = BS'$ và $DS = DS' \Rightarrow \Delta SBD = \Delta S'BD$ (c.c.c)

$\Rightarrow OS = OS' \Rightarrow \Delta OSS'$ cân tại O $\Rightarrow OA \perp SS' \Leftrightarrow AC \perp SA$.

Trong (CSS') kẻ Ox song song với SS' và cắt SC, S'C theo thứ tự tại E, F và là trung điểm của mỗi đường, ta có ngay:

EF // SA.

Mặt khác, vì:

$\Delta SBC = \Delta S'BC$ (c.c.c) $\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B

$\Rightarrow OB \perp EF \Leftrightarrow BD \perp SA$.

Chú ý: Đề nghị các em học sinh đề xuất một cách giải khác để chứng minh SA vuông góc với BD.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1:

a. Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b. Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Bài tập 3: Cho hình tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Chứng minh rằng:

a. $AB \perp CD$.

b. Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bài tập 4: Mỗi khẳng định sau có đúng không ?

a. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = a và $MN = a\sqrt{2}$.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Bài tập 7: Cho hình tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$.

a. Hãy tính góc giữa AB và CD

b. Chứng minh rằng nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bài tập 8: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$. $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

Bài tập 9: Cho S là diện tích ΔABC. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng SA ⊥ BC, SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

Bài tập 11: Cho tứ diện ABCD.

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b. Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Bài tập 12: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A. Chứng minh rằng:

a. AB ⊥ CC'.

b. Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Bài tập 13: Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và ABC'D' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng AB ⊥ OO' và tứ giác CDD'C' là hình chữ nhật.

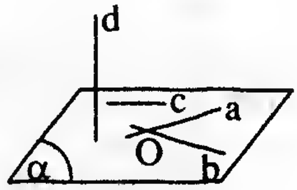
CHỦ ĐỀ 3

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ MỞ ĐẦU

Nếu đường thẳng d *vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau* a *và* b *nằm trong mặt phẳng* α *thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong* α.



Như vậy:

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ d \perp a \text{ và } d \perp b \end{cases} \Rightarrow \forall c \subset \alpha \text{ luôn có } d \perp c.$$

2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

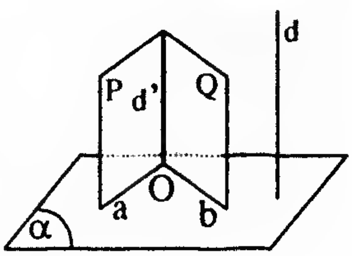
***Định nghĩa**: Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.*

Khi dường thẳng a vuông góc với mặt phẳng α, ta kí hiệu là a ⊥ α hay α ⊥ a.

***Định lí 1**: Từ một điểm O cho trước, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng d cho trước.*

Cách dựng:

- Qua O dựng dường thẳng d' // d.
- Lấy hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng di qua d'. Trong (P) dựng dường thẳng a qua O và vuông góc với d'. Trong (Q) dựng dường thẳng b qua O và vuông góc với d'



Khi đó (a, b) chính là mặt phẳng cần dựng.

Hệ quả 1: *Cho trước điểm O và đường thẳng a. Nếu qua O ta dựng đường thẳng b vuông góc với a thì b chứa trong mặt phẳng qua O vuông góc với a.*

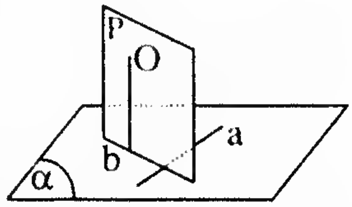
Hệ quả 2: *Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.*

Định lí 2: *Từ một điểm O cho trước ta dựng được một và và chỉ một đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng α cho trước.*

Cách dựng:

- Lấy đường thẳng a nằm trong α.
- Dựng mặt phẳng (P) qua O vuông góc với a cắt α theo giao tuyến b.
- Trong (P) dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với b

Khi đó d chính là đường thẳng cần dựng.



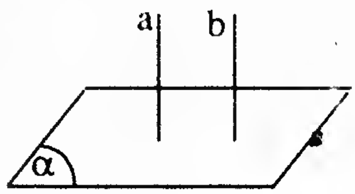
3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Chúng ta có các mối liên hệ sau:

1. *Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.*

   Tức là:

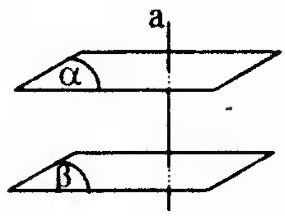
$$\begin{cases} a // b \\ a \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp \alpha.$$



2. *Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.*

   Tức là:

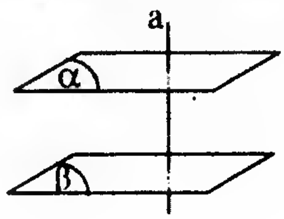
$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ a \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta.$$



3. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

   Tức là:

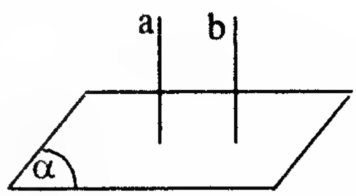
$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$



4. *Cho hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc một mặt phẳng thì song song với nhau.*

   Tức là:

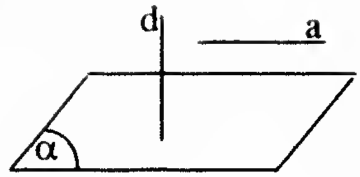
$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow a // b.$$



5. *Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

Tức là:

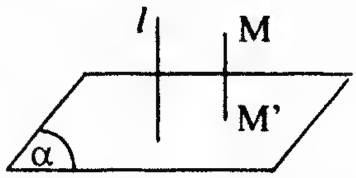
$$\begin{cases} a \perp d \\ \alpha \perp d \end{cases} \Rightarrow a \,//\, \alpha.$$



i. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

ịnh nghĩa: *Phép chiếu song song trong đó phương chiếu uông góc với mặt chiếu gọi là phép chiếu vuông góc.*

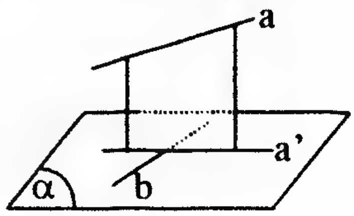
'hú ý: Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của hép chiếu song song.



ịnh lí 3 (Định lí ba đường vuông góc): *Cho đường thẳng* a *không vuông góc với ặt phẳng* α. *Một đường thẳng* b *nằm trong* α *vuông góc với đường thẳng* a *khi và hỉ khi* b *vuông góc với hình chiếu của* a *trên* α.

Tức là, với a' là hình chiếu vuông góc của a lên α thì:

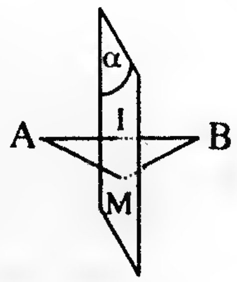
$$a \perp b \subset \alpha \Leftrightarrow a' \perp b.$$



i. MẶT PHẲNG TRUNG TRỰC

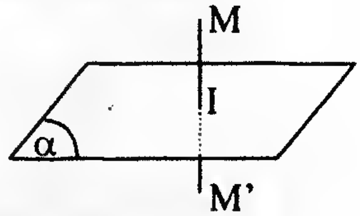
ịnh nghĩa: *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng à mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung iểm của nó.*

ịnh lí 4: *Tập hợp những điểm cách đều hai đầu của một loạn thẳng là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng đó.*



i. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MỘT MẶT PHẲNG

ịnh nghĩa: *Phép đối xứng qua mặt phẳng* α *là phép ho tương ứng với mỗi điểm* M *trong không gian một iểm* M' *sao cho* α *là mặt phẳng trung trực của đoạn* MM'.



I. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1:	Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng – Mặt phẳng trung trực. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng α, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

   Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong α.

   Cách 2: Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với α.

2. Để chứng minh mặt phẳng α là mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta đi chứng minh α vuông góc với AB tại trung điểm I của AB

3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

   Cách 1: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng b.

   Cách 2: Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

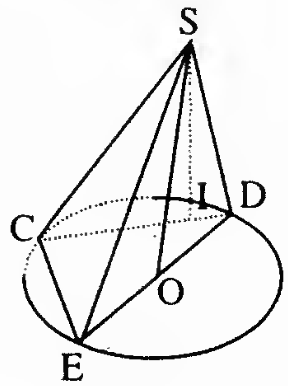
   Cách 3: Nếu hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp đã học trong hình học phẳng.

Ví dụ 1: Gọi I là một điểm bất kì ở trong đường tròn (O), tâm O, bán kính bằng R. CD là dây cung của đường tròn (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O).

a. Chứng minh rằng ΔSDE vuông tại S

b. Chứng minh rằng $SD \perp CE$.

c. Chứng minh rằng ΔSCD vuông.



Giải

a. Trong ΔSDE, ta có:

SO là đường trung tuyến,

$$SO = R = \frac{1}{2}.2R = \frac{1}{2}BD,$$

suy ra ΔSDE vuông tại S.

b. Ta có ngay:

$CE \perp SI$, vì SI vuông góc với đáy

$CE \perp CD$, góc chắn nửa đường tròn.

suy ra:

$CE \perp (SCD) \Rightarrow CE \perp SD$. (1)

c. Từ kết quả câu a), ta có:

$SE \perp SD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(SCE) \perp SD \Rightarrow SC \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại S.

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông của điểm O trên mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng $BC \perp (OAH)$, $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d. Chứng minh rằng các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Giải

a. Từ giả thiết:

$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (1)

Ta có:

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Leftrightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

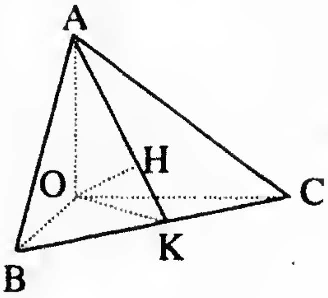
Chứng minh tương tự ta nhận được $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH.$ (3)

$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của ΔABC.



c. Giả sử AH cắt BC tại K, suy ra $OK \perp BC$.

- Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Trong ΔOAK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}, \text{ đpcm.}$$

d. Giả sử $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Xét ΔABC vuông tại O, ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2,$

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2,$

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + c^2,$

$$\cos B\hat{A}C = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$$

$\Rightarrow$ góc $B\hat{A}C$ nhọn.

Chứng minh tương tự, ta được các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ đều nhọn.

Vậy, các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Chú ý: Ví dụ trên đã trình bày cách chứng minh các tính chất cơ bản của tứ diện vuông.

<u>Ví dụ 3:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.
b. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
c. Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong một mặt phẳng.
d. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
e. Tính diện tích tứ giác AHIK, biết $SA = AB = a$.

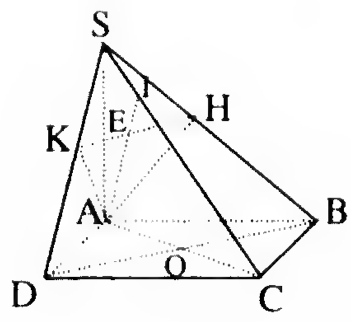
Giải

a. Từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC.$ (1)

Mặt khác, ta có:

$AB \perp BC$, vì ABCD là hình vuông. (2)



Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta được $CD \perp (SAD)$.

b. Từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (3)

Mặt khác, ta có:

$AC \perp BD$, vì ABCD là hình vuông. (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$BD \perp (SAC)$ tại trung điểm O của BD.

Vậy, (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD.

c. Từ giả thiết và kết hợp với kết quả câu a), ta được:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Chứng minh tương tự ta được $AK \perp SC$.

Như vậy, vì AH, AI, AK cùng vuông góc với SC nên ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

d. Giả sử HK cắt AI tại E.

Nhận xét rằng:

$\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SH = SK$.

Trong ΔSBD, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD \text{ và E là trung điểm của HK.}$$

Kết hợp với kết quả ở câu a), suy ra:

$HK \perp (SAC)$ tại trung điểm E của HK.

Vậy, (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK.

Từ kết quả $HK \perp (SAC)$ suy ra $HK \perp AI$.

e. Ta có:

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK. \quad (5)$$

trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (6)$$

- Trong ΔSBD, ta được:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HK \text{ là đường trung bình} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (7)$$

Thay (6), (7) vào (5), ta được;

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

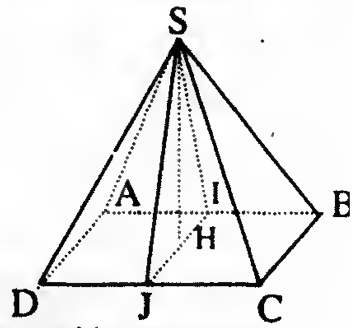
Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a. mặt bên SAB là tam giác đều; SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng SI ⊥ (SCD), SJ ⊥ (SAB).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh rằng SH ⊥ AC và tính độ dài SH.

c. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM ⊥ SA. Tính AM theo a.

Giải



a. Xét ΔSIJ, ta lần lượt có:

IJ = a, đường trung bình của hình vuông.

$SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đường cao trong tam giác đều

$SJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông.

Nhận xét rằng:

$$SI^2 + SJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ \text{ vuông tại } S \Leftrightarrow SI \perp SJ.$$

Khi đó, với:

$$\begin{cases} CD \perp SJ \\ CD \perp IJ \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SI \overset{SJ \perp SI}{\Rightarrow} SI \perp (SCD).$$

Chứng minh tương tự, ta được SJ ⊥ (SAB).

b. Ta có:

SH ⊥ CD, theo kết quả trong a) có CD ⊥ (SIJ)

SH ⊥ IJ, theo giả thiết

suy ra:

SH ⊥ (ABCD) ⇒ SH ⊥ AC.

Trong ΔSIJ ta có:

$$S_{\Delta SIJ} = \frac{1}{2}SH.IJ = \frac{1}{2}SI.SJ \Rightarrow SH = \frac{SI.SJ}{IJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

c. Điều kiện để:

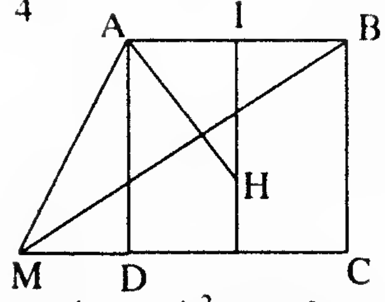
BM ⊥ SA ⇔ BM ⊥ AH, theo định lí ba đường vuông góc.

Ta có ngay ΔAIH và ΔBCM là hai tam giác vuông đồng dạng, suy ra:

$$\frac{IH}{CM} = \frac{AI}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CM = 2IH. \qquad (1)$$

Trong ΔSIH ta có:

$$IH = \sqrt{SI^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{3a}{4}. \qquad (2)$$



Thay (2) vào (1) ta được:

$$CM = 2.\frac{3a}{4} = \frac{3a}{2}.$$

Khi đó, trong ΔADM ta có:

$$AM^2 = AD^2 + MD^2 = AD^2 + (CM - CD)^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ (tức là } M \equiv J).$$

Bài toán 2: Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đườn thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng α, α qua điểm M cho trư và vuông góc với một đường thẳng d cho trước, ta lựa chọn một trong hai cách sa

Cách 1: Dựng mặt phẳng α như sau:

- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó ít nhất một đường thẳng qua M.
- Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là α.
- Xác định thiết diện theo phương pháp đã học.

Cách 2: Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông g với d thì:

α // a hay chứa a

α // b hay chứa b

Ví dụ 1: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a. SA = và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AC, α mặt phẳng qua M và vuông góc với AC.

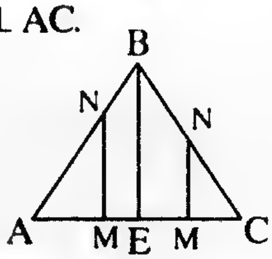
a. Tuỳ theo vị trí của điểm M trên cạnh AC, có nhận xét gì về thiết diện tạo b α với tứ diện S.ABC.

b. Đặt CM = x, với 0 < x < a. Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

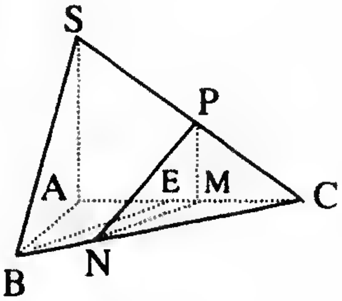
Giải

a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có ngay BE ⊥ AC. Do đó, cần xét hai trường hợp khác nhau về vị trí của điểm M trên cạnh AC và trong đó ta sử dụng:

SA ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ AC.



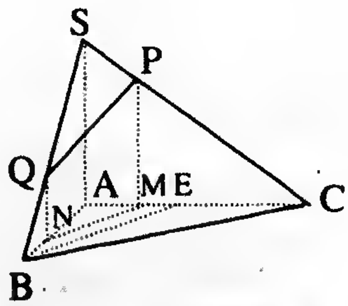
Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta thực hiện:



- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt BC tại N (ta được MN ⊥ AC).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được MP ⊥ AC).

Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là ΔMNP vuông tại M.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE (trừ điểm E).



- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt AC tại N (ta được MN ⊥ AC).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được MP ⊥ AC).
- Trong (SAB) dựng Nz // SA và cắt SB tại Q (ta được NQ ⊥ AC).

Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là hình thang vuông MNQP (vuông tại M và N).

b. Ta xét hai trường hợp của điểm M

Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta có $0 < x \le \frac{a}{2}$ và diện tích ΔMNP là:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN.MP. \quad (1)$$

Trong ΔBCE, ta có:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{CM}{CE} = \frac{x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = x\sqrt{3}. \quad (2)$$

Trong ΔSAC, ta có:

$$\frac{MP}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{x}{a} \Rightarrow MP = x \quad \text{– \textit{Cách tính thứ nhất.}} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}.x\sqrt{3}.x = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

ta có ngay:

$$(S_{\Delta MNP})_{Max} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8},$$

đạt được khi $x = \frac{a}{2}$.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE, ta có $\frac{a}{2} < x < a$ và diện tích MNQP là:

$$S_{MNQP} = \frac{1}{2}(MP + NQ).MN.. \quad (4)$$

Trong ΔABE, ta có:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AE} = \frac{a-x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x). \quad (5)$$

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ΔPMC vuông cân tại N, do đó:

$MP = CE = x$ – *Cách tính thứ hai.* (6)

Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{NQ}{SA} = \frac{BN}{BA} = \frac{ME}{EA} = \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow NQ = 2x - a. \quad (7)$$

Thay (5), (6), (7) vào (4), ta được:

$$S_{MNQP} = \frac{1}{2}(x + 2x - a).\sqrt{3}(a-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x).$$

ta biến đổi tiếp:

$$S_{MNQP} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{a^2}{9} - \left(x - \frac{2a}{3}\right)^2\right] \le \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

suy ra $(S_{MNQP})_{Max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x = \frac{2a}{3}$.

Tóm lại, ta được:

$$S_{td} = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt{3}}{2} & \text{với } 0 < x \le \frac{a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x) & \text{với } \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

và $(S_{td})_{Max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x = \frac{2a}{3}$.

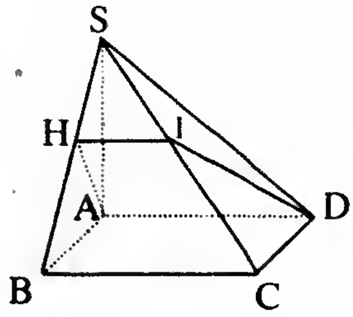
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với (ABCD). Gọi AH là đường cao của ΔSAB.

a. Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SB}$ và độ dài AH.

b. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB, α cắt hình chóp S.ABCI theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của thiết diện.

Giải

a. Trong ΔSAB vuông tại S, ta có:



$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{AB^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

b. Dựng thiết diện:

- Trong (SBC) dựng $Hx \perp SB$ và cắt SC tại I.
- Nối D với I, ta được thiết diện là tứ giác AHID.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Trong mặt phẳng (SBC), ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ HI \perp SB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HI // BC // AD \\ HI \perp AH \end{cases} \Rightarrow \text{AHID là hình thang vuông tại A và H.}$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{HI}{BC} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2a}{3}.$$

Từ đó:

$$S_{AHID} = \frac{1}{2}(AD + HI).AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2a}{3}\right).\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}.$$

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên đường thẳng vuông góc vớ mặt phẳng (ABCD) tại A lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, α cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Chứng minh rằng $AM \perp SB$, $AP \perp SD$ và $SM.SB = SN.SC = SP.SD = SA^2$.

b. Chứng minh rằng tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

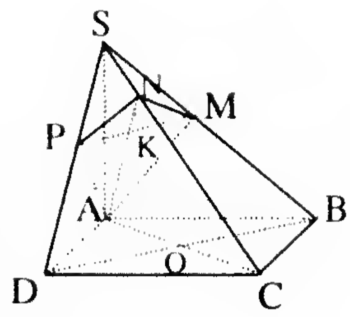
c. Gọi O là giao điểm của AC và BD; K là giao điểm của AN và MP. Chứng minh rằng ba điểm S, K, O thẳng hàng.

d. Tính diện tích tứ giác AMNP.

Giải

Dựng thiết diện:

- Trong (SAC) dựng $AN \perp SC$.
- Trong (SBC) dựng $Nx \perp SC$ và cắt SB tại M.
- Trong (SCD) dựng $Ny \perp SC$ và cắt SD tại P.



Thấy ngay A, M, N, P đồng phẳng vì cùng thuộc mặt phẳng qua N (hoặc A) và vuông góc với SC.

a. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo cách dựng ta có:

$$SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB.$$

Chứng minh tương tự, ta được $AP \perp SD$.

Các ΔSAB, ΔSAC, ΔSAD cùng vuông tại A và lần lượt có các đường cao AM, AN, AP, suy ra:

$$SA^2 = SM.SB = SN.SC = SP.SD. \qquad (3)$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AP \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp MN \\ AP \perp PN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AMN} = 90^0 \\ \widehat{APN} = 90^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AMNP nội tiếp đường tròn đường kính AN.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AN.$$

Dễ thấy SB = SD, do đó từ (3):

$$SM.SB = SP.SD \Leftrightarrow SM.SD = SP.SB \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD}$$

$$\Rightarrow MP // BD \Rightarrow MP \perp AN.$$

Vậy, tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c. Ta có:

$$\begin{cases} S, K, O \in (SAC) \\ S, K, O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow \text{ba điểm S, K, O thẳng hàng.}$$

d. Ta có:

$$S_{AMNP} = \frac{1}{2} AN.MP. \qquad (4)$$

trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AN = a. \qquad (5)$$

- Trong ΔSBD, ta được:

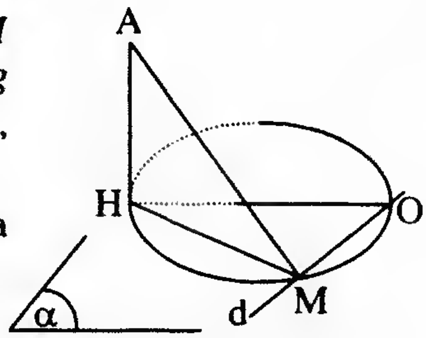
$$\frac{MP}{BD}=\frac{SM}{SB}=\frac{SM.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=\frac{2a\sqrt{2}}{3}\quad(6)$$

Thay (5), (6) vào (4), ta được;

$$S_{AHIK}=\frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài toán 3: Tập hợp hình chiếu của một điểm cố định trên một đường thẳng di động.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Với yêu cầu " *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc M của điểm cố định A trên đường thẳng d di động trong mặt phẳng α cố định và luôn qua một điểm cố định O* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Dựng AH ⊥ α (H ∈ α), theo định lí ba đường vuông góc ta có:

HM ⊥ d.

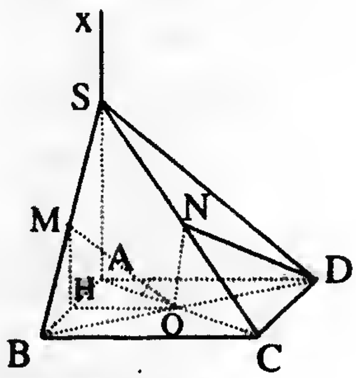
Bước 2: Trong mặt phẳng α, vì $\widehat{HMO}=90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong α.

Ví dụ 1: Cho hình vuông ABCD tâm O; S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB.

b. Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D trong ΔSDC.

Giải



a. Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng (SAB) cố định và đi qua điểm B cố định.

Hạ OH ⊥ AB, từ giải thiết:

SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ OH ⇒ OH ⊥ (SAB).

Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB, suy ra:

SB ⊥ MH, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{BMH}=90^0\Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính BH chứa trong (SAB).

Khi S di động trên tia Ax thì M thuộc nửa đường tròn đường kính BH trong nửa mặt phẳng (SAB) bờ AB.

b. Nhận thấy đường thẳng SC nằm trong mặt phẳng (SAC) cố định và đi qua điểm C cố định.

Ta có:

$$\begin{cases}DO\perp AC\\DO\perp SA\end{cases}\Rightarrow DO\perp(SAC).$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng SC, suy ra:

$ON \perp SC$, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{ONC} = 90^0 \Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính OC chứa trong (SAC).

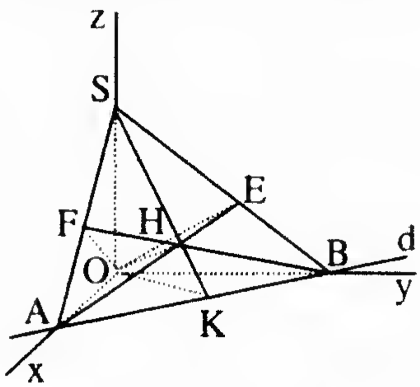
Khi S di động trên tia Ax thì N thuộc nửa đường tròn đường kính OC trong nửa mặt phẳng (SAC) bờ AC.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α cho góc vuông xOy, d là đường thẳng cố định trong α, d cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi Oz là tia vuông góc với α, S là một điểm trên Oz. Gọi AE, BF là đường cao của ΔSAB.

a. Cho góc xOy cố định, S di động trên ta Oz. Tìm tập hợp các điểm E và F.

b. Cho S cố định, góc xOy quay quanh O. Chứng minh rằng trực tâm của ΔSAB cố định. Tìm tập hợp các điểm E và F.

Giải



a. Ta lần lượt tìm tập hợp các điểm E và F.

- *Tìm tập hợp điểm E*: Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng (yOz) cố định và đi qua điểm B cố định.

  Ta có:

  $$\begin{cases} AO \perp BO \\ AO \perp SO \end{cases} \Rightarrow AO \perp (xOz)$$

  $\Rightarrow OE \perp SB$, theo định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow \widehat{OEB} = 90^0$

  $\Rightarrow$ E thuộc đường tròn đường kính OB chứa trong (yOz).

  Khi S di động trên tia Oz thì E thuộc nửa đường tròn đường kính OB trong nửa mặt phẳng (yOz) bờ Oy.

- *Tìm tập hợp điểm F*: Thực hiện tương tự ta được F thuộc nửa đường tròi đường kính OA trong nửa mặt phẳng (xOz) bờ Ox.

b. Giả sử $AE \cap BF = H$, suy ra H là trực tâm của ΔSAB và ta đi chứng minh H cố định.

Kéo dài SH cắ AB tại K, ta có:

$$\begin{cases} AB \perp SK \\ AB \perp SO \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow AB \perp OK \Rightarrow K \text{ cố định} \Rightarrow H \text{ cố định.}$$

Trong mặt phẳng (S, d) cố định và có SH cố định và:

- Vì $\widehat{SEH} = 90^0$ nên E thuộc nửa đường tròn đường kính SH trong nửa mặ phẳng (SBK) bờ SK.
- Vì $\widehat{SFH} = 90^0$ nên F thuộc nửa đường tròn đường kính SH trong nửa mặ phẳng (SAK) bờ SK.

Bài toán 4: Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của một điểm cố định trên một mặt phẳng di động.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu:

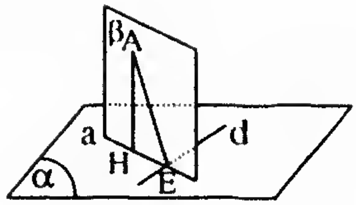
" *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc H của một điểm cố định A trên mặt phẳng α di động luôn chứa một đường thẳng d cố định* ",

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định mặt phẳng β qua A vuông góc với d. Tìm $a = \alpha \cap \beta$

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a, thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên α.

Bước 3: Gọi E là giao điểm của d với β. Trong mặt phẳng β, $\widehat{AHE} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

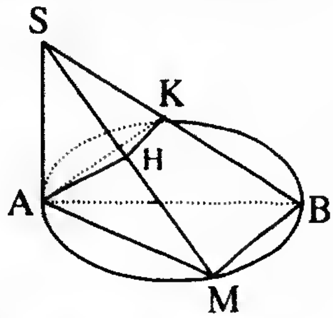


Ví dụ 1: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C), đường kính AB, SA vuông góc với α. Gọi M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (SBM). Tìm tập hợp các điểm H.

Giải

Nhận thấy mặt phẳng (SBM) chứa đường thẳng SB cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua A và vuông góc với SB bằng cách:

- Trong (SAB) hạ $AK \perp SB$.
- Trong (SBM) dựng $Kx \perp SB$ và cắt SM tại H.



Khi đó:

$$(AKH) \perp SB \text{ và } (AKH) \cap (SBM) = KH.$$

Ta đi chứng minh $AH \perp (SBM)$, thật vậy:

$$\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH \overset{SB \perp AH}{\Rightarrow} AH \perp (SBM).$$

Trong (AKH), ta có:

$$AH \perp HK \Leftrightarrow \widehat{AHK} = 90^0$$

nên H thuộc đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (AKH).

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên cạnh SB.

a. Khi M là trung điểm của cạnh SB, tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (ADM).

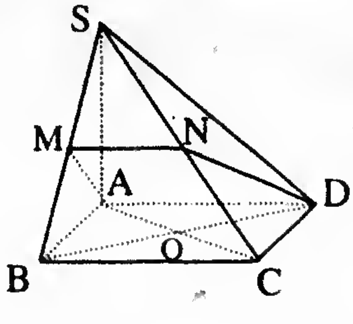
b. Khi M di động trên cạnh SB. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ADM).

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADM) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADM) \cap (SBC) = Mx \end{cases}$$

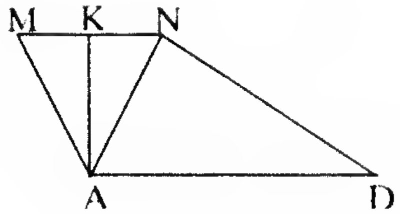
$$\Rightarrow Mx // AD // BC$$



và Mx cắt SC tại N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện AMND là hình thang.

Trong hình thang AMND hạ AK ⊥ MN, ta được:



$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN).AK \qquad (1)$$

rong đó:

- Trong ΔSBC có MN là đường trung bình nên:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

- Trong ΔSAB vuông tại A có AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

- Trong ΔSAC vuông tại A có AN là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AN = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (4)$$

- Trong ΔAMN cân tại A, ta có:

$$AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}. \qquad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

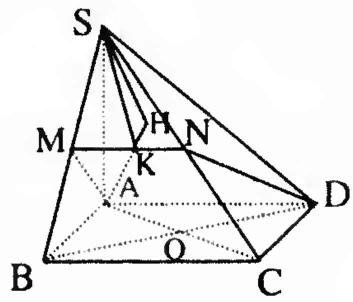
$$S_{AMND} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{16}.$$

). Nhận thấy mặt phẳng (ADM) chứa đường thẳng AD cố định. Ta đi dựng mặt)hẳng qua S và vuông góc với AD bằng nhận xét:

$$AK \perp MN \Leftrightarrow AK \perp AD$$

Khi đó:

(SAK) ⊥ AD và (SAK) ∩ (ADM) = AK.



Trong (SAK) hạ SH ⊥ AK thì H cũng là hình chiếu /uông góc của S trên (ADM).

Trong (SAK), ta có:

$$SH \perp AH \Leftrightarrow \widehat{SHA} = 90^0$$

1ên H thuộc đường tròn đường kính SA trong mặt phẳng (SAK).

Hạn chế quĩ tích – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (α). Các mệnh đề sau đây đúng 1ay sai ?

a. Nếu a // (α) và b ⊥ (α) thì a ⊥ b.

b. Nếu a // (α) và b ⊥ a thì b ⊥ (α).

c. Nếu a // (α) và b // (α) thì b // a.

d. Nếu a ⊥ (α) và b ⊥ a thì b // (α).

Bài tập 2: Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân)iệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mp(P)" có đúng không ? Vì sao ?

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).

b. Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O và có SA = SB = SC = SD. Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 5: Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng:

a. $SO \perp (\alpha)$.

b. Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các ΔABC và SBC. Chứng minh rằng:

a. AH, SK, BC đồng quy.

b. $SC \perp mp(BHK)$.

c. $HK \perp mp(SBC)$.

Bài tập 7: Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

a. $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$.

b. $SB \perp AN$.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a. BD vuông góc với SC.

b. IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 9: Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Bài tập 10: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.

a. Tính độ dài AD.

b. Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

Bài tập 11: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ điện như thế gọi là tứ diện trực tâm. Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

a. ABCD là tứ diện trực tâm.

b. Chân đường cao hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

c. $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

d. Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.

Bài tập 12: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh B'D' song song với BD và AB' vuông góc với SB.

c. Tính diện tích thiết diện AB'C'D'.

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh rằng SG $\perp$ (ABC). Tính SG.

b. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Bài tập 14: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi α là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện với α và tính diện tích của thiết diện này.

Bài tập 15: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi α là mặt phẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB.

a. Tìm thiết diện của tứ diện với α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 16: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với (ABC). Gọi α là mặt phẳng trung trực của SB, O là trung điểm của BC, d là đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC).

a. Tìm giao điểm K của d với mặt phẳng α.

b. Tính độ dài OK.

c. M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB, đặt AM = x, với $0 < x < a$. Gọi β là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Tìm thiết diện của tứ diện với β và tính diện tích của nó.

Bài tập 17: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = a. Gọi O là trung điểm AH. Trện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt x = AI, với $a < x < a$. Gọi α là mặt phẳng qua I và vuông góc với OH.

a. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Bài tập 18: Cho hình tứ diện S.ABC có hai mặt ABC và SBC là các tam giác đều cạnh bằng a và $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB, đặt AM = x, với $0 < x < a$. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC.

a. Gọi D là trung điểm BC, Chứng minh rằng α // (SAD)

b. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với α. Thiết diện là hình gì ?

c. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Bài tập 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = $a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên cạnh AB, α là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB. Đặt x = AM, với $0 < x < a$.

a. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với α. Thiết diện là hình gì ?
b. Tính diện tích thiết diện theo a và x

Bài tập 20: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O lấy điểm S sao cho ΔSAC là tam giác đều. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, α cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Tính độ dài đoạn AN. Chứng minh rằng N là trung điểm SC.
b. Chứng minh rằng MP // BD. Từ đó, suy ra cách dựng M và P.
c. Chứng minh rằng tứ giác AMNP có hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích của tứ giác này.

Bài tập 21: Cho hình thoi ABCD có tâm O với các đường chéo AC = 2a, BD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại O ta lấy điểm S sao cho $SO = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng α qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Chứng minh tứ giác AMNP có hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích từ tứ giác AMNP.
b. Chứng minh rằng MNP là tam giác đều.

Bài tập 22: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I là trung điểm của cạnh SC, M là một điểm di động trên cạnh AD.

a. Tìm tập hợp các điểm K, hình chiếu vuông góc của I trên CM.
b. Tìm tập hợp chân đường cao E vẽ từ đỉnh B trong ΔSBM.

Bài tập 23: Cho ΔABC đều, S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên SB.
b. Gọi N là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBC). Chứng minh rằng đường thẳng SN qua trung điểm của BC. Tìm tập hợp các điểm N.
c. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Chứng minh rằng BK ở trong một mặt phẳng cố định. Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của A trên BK.

Bài tập 24: Cho ΔABC đều ở trong mặt phẳng α. Vẽ Bx và Cy là hai tia cùng chiều và cùng vuông góc với α. Cho M, N là hai điểm lần lượt di động trên Bx, Cy. Tìm tập hợp chân H của đường cao AH của ΔAMN khi M, N di động thỏa một trong các điều kiện dưới đây:

a. BM = CN.
b. 2BM = CN.
c. BM + CN = 2a, với a là độ dài không đổi.

Bài tập 25: Cho hình tứ diện S.ABC có SI vuông góc với mặt phẳng (ABC) và I là trung điểm của cạnh AB. M là một điểm di động trên cạnh SC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABM).

Bài tập 26: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (MBC) khi M di động từ S đến A.

Bài tập 27: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (γ) tâm O. A là điểm cố định trên (γ) và BC là dây cung di động của (γ) luôn vuông góc với OA. Trên đường thẳng vuông góc với α tại A lấy điểm cố định S khác A. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBC).

Bài tập 28: Cho hình vuông ABCD tâm O, trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm S.

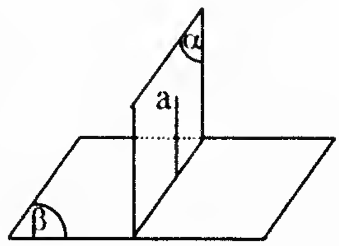
a. Cho S di động trên tia Ax. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SBC).

b. Cho S cố định. M là một điểm di động trên đoạn AC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SMB).

CHỦ ĐỀ 4
HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

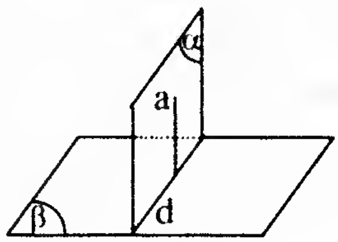
1. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC



***Định nghĩa**: Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*

Như vậy: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \in \alpha: a \perp \beta$.

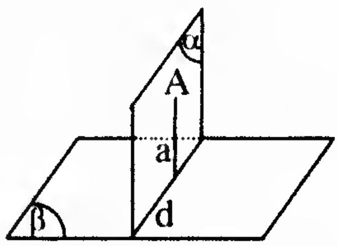
2. CÁC TÍNH CHẤT



***Định lí 1**: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.*

Tức là:

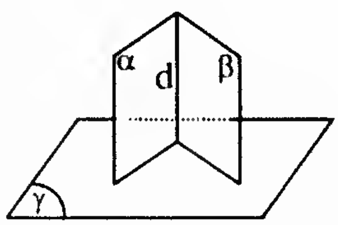
$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \text{ và } \alpha \cap \beta = d \\ a \in \alpha \text{ và } a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta.$$



***Định lí 2**: Nếu hai mặt phẳng α và β vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trên α thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với β sẽ nằm trong α.*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \text{ và } A \in \alpha \\ A \in a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \in \alpha.$$



***Định lí 3**: Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

Tức là:

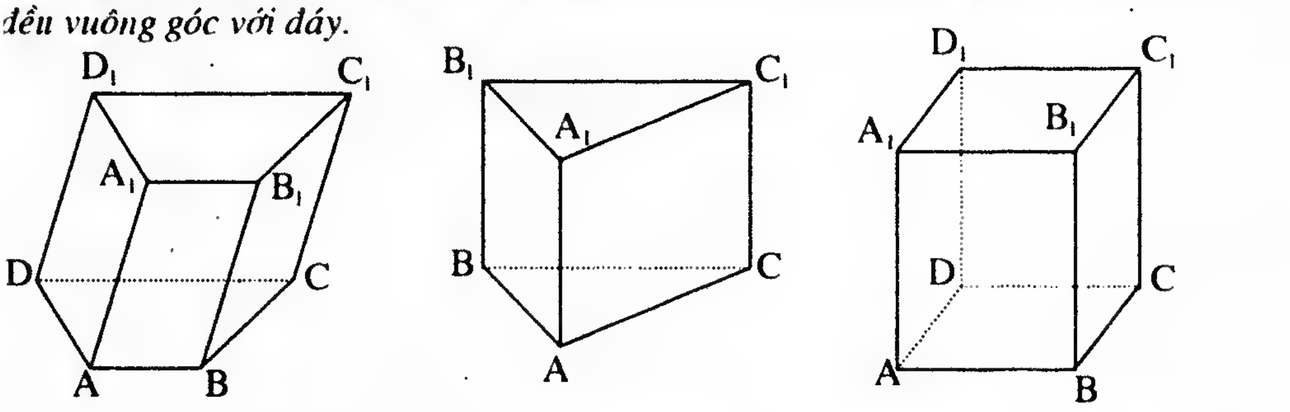
$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ \alpha \perp \gamma \text{ và } \beta \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow d \in \gamma.$$

***Định lí 4**: Qua một đường thẳng không vuông góc với một mặt phẳng, ta dựng được một vài chỉ một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng ấy.*

3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

***Định nghĩa**: Một hình lăng trụ được gọi là hình lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với các mặt đáy.*

Nhận xét rằng *các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật và đều vuông góc với đáy.*



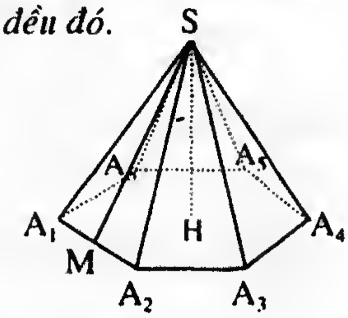
Lăng trụ *Lăng trụ đứng* *Lăng trụ đều*

Ta có các trường hợp:

1. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là một miền đa giác đều được gọi là lăng trụ đều*. Như vậy, lăng trụ đều có các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
2. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng*. Như vậy, hình hộp đứng có bốn mặt bên là những hình chữ nhật và hai đáy là hình bình hành.
3. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật*. Như vậy, hình hộp chữ nhật có sáu mặt đều là những hình chữ nhật.
4. *Hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*

4. HÌNH CHÓP ĐỀU

***Định nghĩa**: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là miền đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đa giác đều đó.*



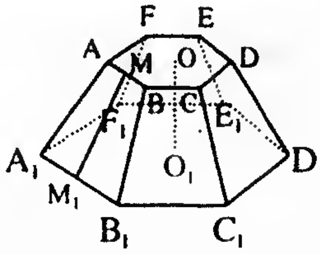
Nhận xét rằng *các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và các mặt bên của nó là những tam giác cân bằng nhau.*

Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bất kì gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.

5. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

***Định nghĩa**: Một hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

Khi đó:



- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng.
- Đường nối tâm OO_1 của hai đáy gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.
Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta đi chứng minh mặ phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
2. Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ngoài những cách tạ biết, ta còn có thêm hai cách sau:

   Cách 1: Sử dụng kết quả của định lí 1.

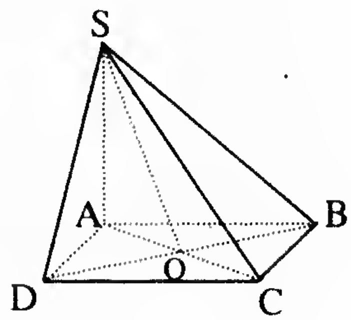
   Cách 2: Sử dụng kết quả của định lí 3.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a vớ $SA = SB = SC = a$

a. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

b. Chứng minh rằng ΔSBD vuông.

Giải



a. Gọi O là tâm của hình thoi, ta có:

$AC \perp SO$, vì ΔSAC cân tại S

$AC \perp BD$, vì ABCD là hình thoi

suy ra:

$(SBD) \perp AC \in (ABCD) \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$.

b. Nhận xét rằng:

$\Delta DAC = \Delta SAC = \Delta BAC$ (c.c.c) $\Rightarrow OD = OS = OB$

$\Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S vì có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền.

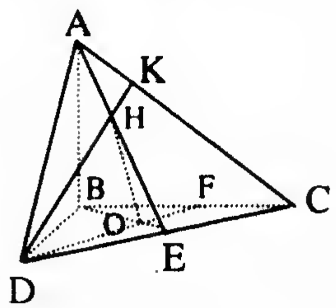
Ví dụ 2: Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC), (ABD) cùng vuông góc với mặ phẳng (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD và đường cao DK của ΔACD.

a. Chứng minh rằng $AB \perp (BCD)$.

b. Chứng minh rằng $(ABE) \perp (ADC)$ và $(DFK) \perp (ADC)$.

c. Gọi O và H lần lượt là trực tâm của ΔBCD và ΔACD. Chứng minh rằng $OH \perp (ACD)$.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC) \cap (ABD) = AB \\ (ABC) \perp (BCD) \text{ và } (ABD) \perp (BCD)\end{cases}$$

$\Rightarrow AB \perp (BCD)$.

b. Ta có:

$$\begin{cases}CD \perp BE \\ CD \perp AB\end{cases} \Rightarrow (ABE) \perp CD \in (ACD) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC).$$

Ta có:

$$\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$DK \perp AC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(DFK) \perp AC \in (ACD) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC).$$

c. Từ kết quả trong b) là:

$$(ABE) \perp CD \Rightarrow AE \perp CD \Rightarrow AE \cap DK = H.$$

Ta có:

$$\begin{cases} (ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABD) \perp (ACD) \text{ và } (DFK) \perp (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$$

Ví dụ 3: Cho ΔACD và ΔBCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh rằng IJ vuông góc với AB và CD.
b. Tính AB và IJ theo a và x.
c. Xác định x sao cho $(ABC) \perp (ABD)$.

Giải

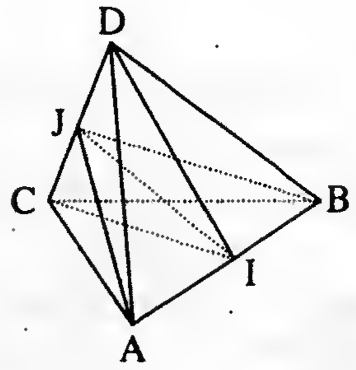
a. Xét ΔACD và ΔBCD, ta có:

CD chung

$AC = AD = BC = BD$

suy ra:

$AJ = BJ \Leftrightarrow \Delta JAB$ cân tại $J \Rightarrow IJ \perp AB$.



Xét ΔCAB và ΔDAB, ta có:

AB chung

$AC = AD = BC = BD$

suy ra:

$DI = CI \Leftrightarrow \Delta ICD$ cân tại $I \Rightarrow IJ \perp CD$.

b. Trong ΔAJC vuông tại J, ta có:

$$AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow AJ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ AJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ.$$

Trong ΔAJB vuông cân tại J, ta có:

$$AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \text{ và } IJ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ DI \perp AB \end{cases}$$

do đó, để (ABC) ⊥ (ABD) điều kiện là:

$DI \perp (ABC) \Rightarrow DI \perp CI \Leftrightarrow \Delta ICD$ vuông tại đỉnh I

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = \frac{1}{2}.2x \Leftrightarrow a = x\sqrt{3}.$$

Vậy, với $a = x\sqrt{3}$ thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

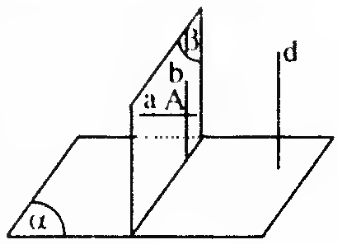
Bài toán 2: Xác định mặt phẳng β chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng α (a không vuông góc với α) – Thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một điểm A trên a sao cho qua A có thể dựng được đường thẳng b vuông góc với α một cách dễ nhất.

Bước 2: Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng β cần dựng.



Chú ý: Nếu có đường thẳng d ⊥ α thì β // d hay β chứa d.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O và cạnh a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi α là mặt phẳng qua O, trung điểm M của SD và vuông góc vớ (ABCD). Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCI theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Gọi β là mặt phẳng qua A, trung điểm E của CD và vuông góc với (SBC) Hãy xác định mặt phẳng β, mặt phẳng β cắt hình chóp S.ABCD theo thiê diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Giải

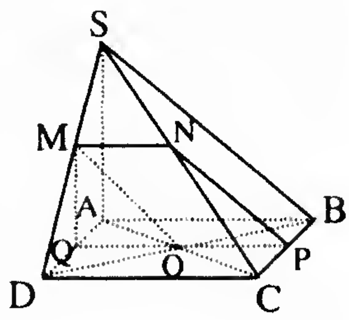
a. Ta lần lượt thực hiện:

▪ *Xác định mặt phẳng α*: Trong (SAD) dựng Mx // SA và cắt AD tại Q là trung điểm của AD, ta có:

$MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \in \alpha$.

Vậy α là mặt phẳng (OMQ).

▪ *Xác định thiết diện*: Kéo dài QO cắt BC tại P là trung điểm của BC, ta có:



$$\begin{cases} PQ \in \alpha \text{ và } CD \in (SCD) \\ PQ // CD \\ \alpha \cap (SCD) = My \end{cases} \Rightarrow My // CD // PQ$$

và My cắt SC tại N là trung điểm của SC.

Vậy, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình thang vuông MNPQ.

▪ *Tính diện tích thiết diện*: Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

trong đó:

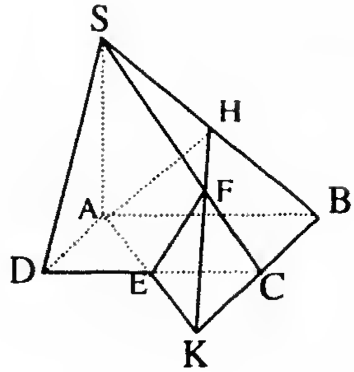
$$MN = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$$, vì MN là đường trung bình của ΔSCD, $PQ = a$,

$$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAD,

suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$

b. Ta lần lượt thực hiện:



- *Xác định mặt phẳng* β: Trong (SAB) hạ $AH \perp SB$ và H là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

Như vậy:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \in \beta.$$

Vậy β là mặt phẳng (AHE).

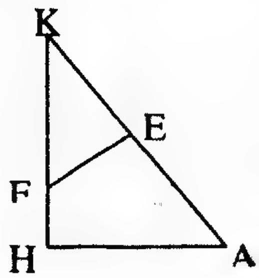
- *Xác định thiết diện*: Kéo dài AE cắt BC tại K, nối HK cắt SC tại F.

Vậy, mặt phẳng β cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là tứ giác AEFH.

- *Tính diện tích thiết diện*: Ta có:

$$S_{AEFH} = S_{\Delta HAK} - S_{\Delta EKF}$$

$$= \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\sin E\hat{K}F = \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\frac{AH}{AK}.$$



Trong ΔSAB, ta có:

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔADE, ta có:

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong ΔKAB, ta có:

$$CE \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \Rightarrow KE = AE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$ và $AK = 2AE = a = a\sqrt{5}$.

Trong ΔHAK vuông tại H, ta có:

$$KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔSBK, ta có SC và SH là hai đường trung tuyến, do đó:

$$KF = \frac{2}{3}KH = a\sqrt{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{AIJH} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Bài toán 3: Hình lăng trụ đứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ đứng để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ đứng cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$. Chứng minh rằng các đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng nhau và bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

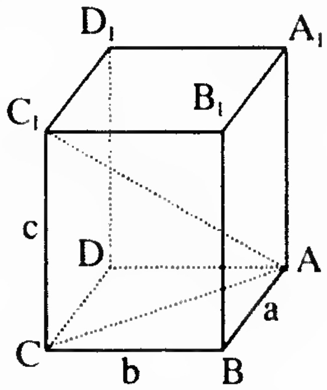
Giải

Nhận xét rằng hai hình chữ nhật AA_1C_1C và BB_1D_1D bằng nhau.

Suy ra:

$$AC_1 = A_1C = BD_1 = D_1B$$

tức là, các đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng nhau.



Trong ΔABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Trong ΔACC_1 vuông tại C, ta có:

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + C_1C^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1C_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua MN và vuông góc với (BCC_1B_1). Thiết diện là hình gì ?

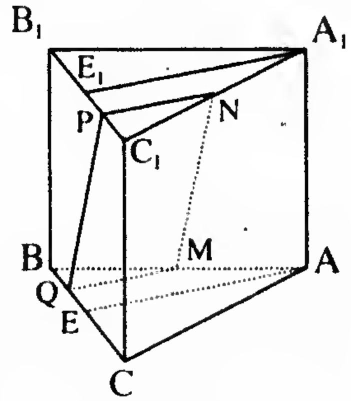
b. Tính diện tích thiết diện.

Giải

a. Gọi E, E_1 theo thứ tự là trung điểm của BC và B_1C_1, ta có ngay: $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (BCC_1B_1)$.

$$A_1E_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow A_1E_1 \perp (BCC_1B_1).$$

$$AE \overset{//}{=} A_1E_1.$$



Do đó:

- Dựng Mx // AE cắt BC tại Q là trung điểm của BE.
- Dựng Ny // A_1E_1 cắt B_1C_1 tại P là trung điểm của E_1C_1.

Vì MQ // NP nên M, N, P, Q đồng phẳng, do vậy MNPQ chính là thiết diện cần dựng.

Nhận xét rằng:

$$MQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AE \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1E_1 \overset{//}{=} NP \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

$$MQ \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow MQ \perp PQ.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

b. Ta có:

$$S_{MNPQ} = MQ.NP.$$

Trong ΔABC, ta có $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, vì ΔABC đều và có cạnh bằng a.

Trong ΔABE, ta có $MQ = \frac{1}{2}AE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, vì MQ là đường trung bình.

Trong ΔECC_1, ta có $PQ = EC_1 = \sqrt{EC^2 + C_1C^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$

Bài toán 4: Hình chóp đều – Hình chóp cụt đều.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình chóp đều và hình chóp cụt đều để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình chóp đều và hình chóp cụt đều cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

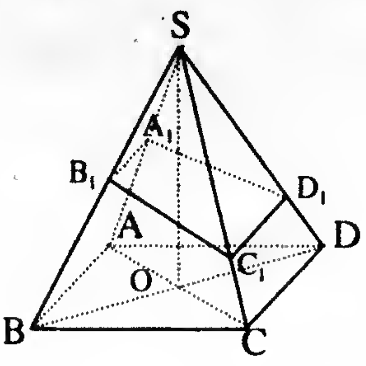
Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng α cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1.

a. Xét đặc điểm của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ khi A_1B_1 hoặc A_1C_1 hoặc cả hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng (ABCD).

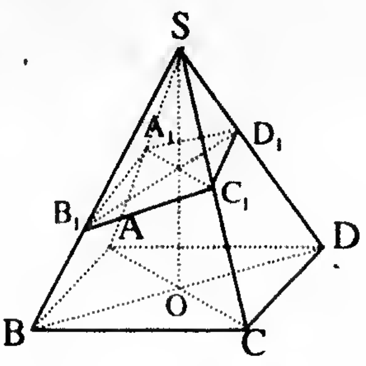
b. Chứng minh rằng $\frac{1}{SA_1} + \frac{1}{SC_1} = \frac{1}{SB_1} + \frac{1}{SD_1}$.

Giải

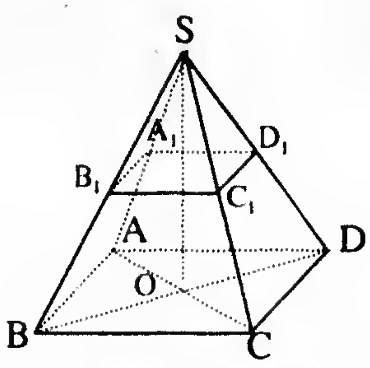
a. Ta có:



Với A_1B_1 // (ABCD)



Với A_1C_1 // (ABCD)



Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD)

- Với A_1B_1 // (ABCD) thì
$$A_1B_1 \text{ // } AB \text{ // } CD \Rightarrow A_1B_1 \text{ // } C_1D_1 \text{ và } A_1D_1 = B_1C_1$$
Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình thang cân.
- Với A_1C_1 // (ABCD) thì
$$A_1C_1 \text{ // } AC.$$
Mặt khác, ta lại có:
$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp B_1D_1 \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D_1.$$
Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD) thì
$$(A_1B_1C_1D_1) \text{ // } (ABCD)$$
Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông.

b. Bạn đọc tự làm

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính diện tích ΔSA_1C_1 và ΔSB_1D_1.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

b. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

c. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất có một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

d. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

e. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

f. Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

g. Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

Bài tập 2: Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi nhu thế nào ?

Bài tập 3: Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a. Góc $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b. Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

c. HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi có cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh rằng:

a. Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b. Tam giác SBD là tam giác vuông.

Bài tập 5: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc $\hat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).
b. Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K.Hãy tính độ dài IK.
c. Chứng minh góc $BKD = 90^0$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có AD = 2a, AB = BC = a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy một điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD. Chứng minh rằng:

a. $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^0$.
b. AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.
c. Chứng minh rằng đường thẳng C'D' luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên tia Ax.

Bài tập 8: Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và AB = AC = BD. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi AC = AB = BD = a.

Bài tập 9: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích tam giác HAB, HBC, HCA.

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình vuông cạnh a. $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a. Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?
b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng (SAD) $\perp$ (SCD) và (SAC) $\perp$ (SBC).
b. Gọi α là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB, M là một điểm trên cạnh AB, đặt AM = x, với $0 \le x < a$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAB).

a. Hãy xác định rõ mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

b. Chứng minh rằng $EM = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

c. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên α. Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên cạnh AB.

Bài tập 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'.

Bài tập 14: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Bài tập 15: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a. Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và B'C.

b. Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C.

Bài tập 16: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD).

b. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Bài tập 17: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mp(ACB').

b. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mp(ACB').

Bài tập 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân tại A. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B_1C_1 có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên (BCC_1B_1) góc β.

a. Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b. Chứng minh rằng $\cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta$.

Bài tập 19: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.

a. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện nói trên.

Bài tập 20: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và AB = a, AA_1 = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1C_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua MN và vuông góc với (BCC_1B_1). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng β qua A và vuông góc với B_1C. Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

c. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng γ qua B_1 và vuông góc với A_1I, với I là trung điểm của cạnh BC. Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 21: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Điểm M thuộc AD_1 và điểm N thuộc BD sao cho AM = DN = x, với $0 < x < a\sqrt{2}$.

a. Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN ngắn nhất.

b. Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với mặt phẳng (A_1D_1BC) khi x biến thiên.

c. Khi MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đoạn thẳng vuông góc chung của AD_1 và DB và MN song song với A_1C.

Bài tập 22: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, cạnh có độ dài bằng a. Điểm M di động trên cạnh AA' là điểm N di động trên cạnh BC sao cho AM = BN = h, với $0 < h < a$.

a. Chứng minh khi h thay đổi thì MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Gọi T là trung điểm của D_1C_1. Hãy dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNT) và hình lập phương.

c. Tính h để chu vi thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 23: Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, cạnh đáy a, đường cao 2a. Gọi M là trung điểm của DD_1. Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (ABM). Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 24: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$.

Bài tập 25: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0.

a. Tính MN và SO.

b. Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

Bài tập 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi có cạnh *a* và có SA = SB = SC = *a*. Chứng minh rằng:

a. Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b. Tam giác SBD là tam giác vuông.

Bài tập 27: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a. Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c. Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Bài tập 28: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc $\hat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

b. Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.

c. Chứng minh góc $BKD = 90^0$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

Bài tập 29: Một tứ diện được gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:

a. Tứ diện ABCD là gần đều.

b. Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau.

c. Các trọng tuyến (đoạn nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện) bằng nhau.

d. Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180^0.

Bài tập 30: Cho tứ diện ABCD. Cắt tứ diện đó theo các cạnh AB, AC, AD và trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD). Hình phẳng gồm các ΔBCD, AA_1BC, AA_2CD, AA_3BD gọi là hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD).

a. Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều ABCD trên mặt phẳng (BCD) là một tam giác nhọn.

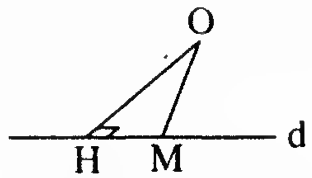
b. Dùng bìa cứng cắt và dán để có một tứ diện gần đều.

CHỦ ĐỀ 5
KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d, kẻ $OH \perp d$ với $H \in d$.



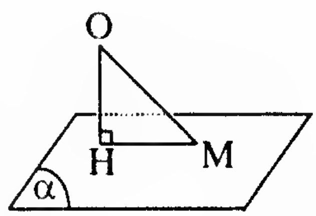
Định nghĩa: *Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d.*

Nhận xét:

- Khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d là bé nhất so với khoảng cách từ O đến mọi điểm của d.
- Khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d bằng 0 khi và chỉ khi $O \in d$.

2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

Trong không gian cho điểm O và mặt phẳng α, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên α.



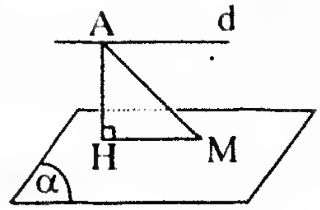
Định nghĩa: *Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α.*

Nhận xét:

- Khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α là bé nhất so với khoảng cách từ O đến mọi điểm của α.
- Khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α bằng 0 khi và chỉ khi $O \in \alpha$.

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong không gian cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α. Lấy điểm A bất kì trên d, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên α.

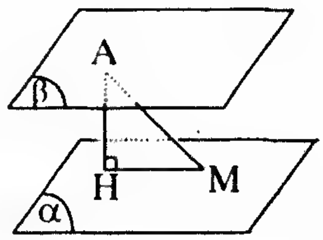


Định nghĩa: *Độ dài đoạn AH được gọi là khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng α.*

Nhận xét: Khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng α là bé nhất sơ với khoảng cách từ một điểm tuỳ ý thuộc d tới một điểm bất kì của α.

4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong không gian cho hai mặt phẳng α, β song song với mhau.

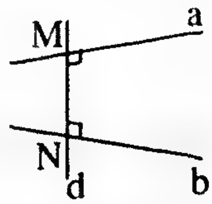


Định nghĩa: *Khoảng cách từ một điểm tuỳ ý của α tới β được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng α và β.*

Nhận xét: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng α và β là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm tuỳ ý thuộc α tới một điểm bất kì của β.

5. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định lí: *Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn có duy nhất một đường thẳng d cắt cả a và b, và vuông góc với mỗi đường thẳng ấy. Đường thẳng d được gọi là đường vuông góc chung của a và b.*



Giả sử d cắt a, b theo thứ tự tại M và N.

Định nghĩa: *Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b. Độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*

Nhận xét: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa:

- Một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

- Hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

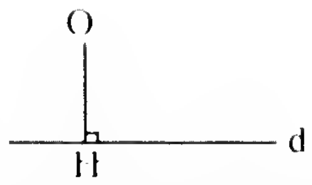
Từ đó suy ra " *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy* ".

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

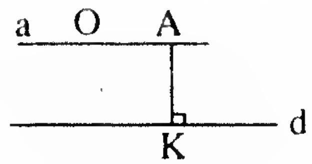
Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d, ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Trong mặt phẳng (O, d) hạ $OH \perp d$ với $H \in d$.

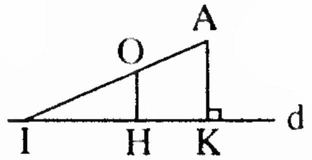
Bước 2: Thực hiện việc xác định độ dài OH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.

Chú ý:



1. Nếu tồn tại đường thẳng a qua O và song song với d thì:

$$d(O, d) = d(A, d), \text{ với } A \in d.$$



2. Nếu $AO \cap d = I$ thì:

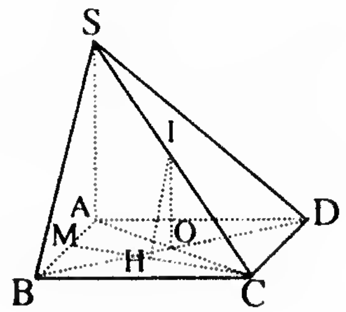
$$\frac{d(O,d)}{d(A,d)} = \frac{OI}{AI}.$$

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a. Chứng minh rằng $OI \perp (ABCD)$.

b. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

Giải



a. Trong ΔSAC, ta có:

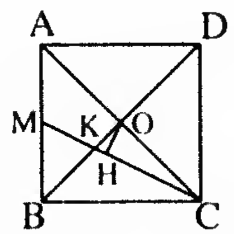
OI là đường trung bình

$\Rightarrow OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên CM, ta có:

$$\begin{cases} CM \perp HI \\ CM \perp OI \end{cases} \Rightarrow CM \perp (IOH) \Rightarrow CM \perp OH.$$

Trong ΔABC có K là trọng tâm, ta có:



$$OB = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$OK = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Trong ΔOCK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2}/6)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}.$$

Trong ΔOIH vuông tại O, ta có:

$$IH^2 = OI^2 + OH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy, khoảng cách từ I tới CM bằng $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vì $SI \cap CM = C$ nên:

$$\frac{d(S, CM)}{d(I, CM)} = \frac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow d(S, CM) = 2d(I, CM) = 2IH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại C với AB = 2a, $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

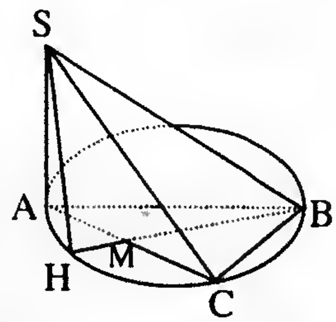
a. Chứng minh rằng $AH \perp BM$.

b. Đặt AM = x, với $0 \le x \le \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Giải

a. Vì $SA \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của SH trên (ABC), do đó:

$AH \perp BM$, theo định lí ba đường vuông góc.



b. Ta thấy ngay khoảng cách từ S đến BM chính là SH và trong ΔSAH ta có:

$$SH^2 = SA^2 + AH^2. \quad (1)$$

Trong ΔABC vuông tại C có $\hat{BAC} = 30^0$ nên:

$$BC = \frac{AB}{2} = a \text{ và } AC = AB.\cos\hat{BAC} = 2a.\cos30^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBCM vuông tại C, ta có:

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = BC^2 + (AC - AM)^2$$
$$= a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2 = x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2$$
$$\Leftrightarrow BM = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}.$$

Nhận xét rằng ΔAMH và ΔCMB là hai tam giác vuông có $\widehat{AMH} = \widehat{CMB}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AH = \frac{AM.BC}{BM} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}. \quad (2)$$

Thay (2) và SA = 2a vào (1), ta được:

$$SH^2 = 4a^2 + \frac{x^2a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2} = \frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}$$

$$\Leftrightarrow SH = \sqrt{\frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}.$$

Từ hệ thức (1) với SA = 2a không đổi, ta có nhận xét:

- SH đạt giá trị lớn nhất khi:

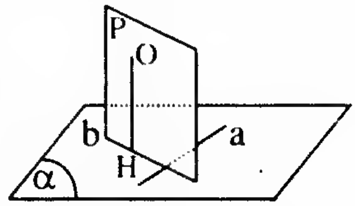
$$AH_{Max} \Leftrightarrow AM_{Max} \Leftrightarrow M \equiv C \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

- SH đạt giá trị nhỏ nhất khi:

$$AH_{Min} \Leftrightarrow AM_{Min} \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow x = 0.$$

Bài toán 2: Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Để tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Để dựng OH với H là hình chiếu vuông góc của O lên α, ta thực hiện:

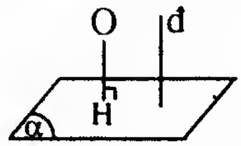
- Lấy đường thẳng a nằm trong α.
- Dựng mặt phẳng (P) qua O vuông góc với a cắt α theo giao tuyến b (cần chọn a sao cho mặt phẳng (P) dễ dựng).
- Trong (P), hạ OH ⊥ b tại H.

Bước 2: Dựng AH ⊥ c tại H., khi đó OH là khoảng cách từ O đến α.

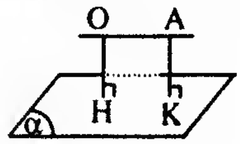
Bước 3: Tính độ dài của đoạn OH là khoảng cách từ A đến α.

Chú ý:

1. Trong bước 1, trước khi chọn a và dựng mặt phẳng (P) nên xét xem a và (P) đã có sẵn trên hình vẽ chưa. Nếu có, chúng ta sẽ giảm thiểu được phép dựng hình.

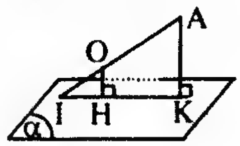


2. Nếu đã có sẵn đường thẳng đ vuông góc với α thì chỉ cần dựng Ox // đ ta được Ox ⊥ α.



3. Nếu OA // α thì:

$$d(O, \alpha) = d(A, \alpha).$$



4. Nếu OA cắt α tại I thì:

$$\frac{d(O,\alpha)}{d(A,\alpha)} = \frac{OI}{AI}.$$

5. Sử dụng tính chất của trục đường tròn, cụ thể:

***Định nghĩa**: Đường vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn gọi là trục của đường tròn đó.*

Ta có thể dùng tính chất của trục đường tròn để:

a. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
b. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cụ thể với trường hợp:

- Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và M là một điểm cách đều ba điểm A, B, C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó MO ⊥ (ABC) và MO = d(M, (ABC)).

- Nếu MA = MB = MC và NA = NB = NC trong đó A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục của đường tròn qua ba điểm A, B, C. Khi đó $MN \perp (ABC)$ tại tâm O của đường tròn qua ba điểm A, B, C.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

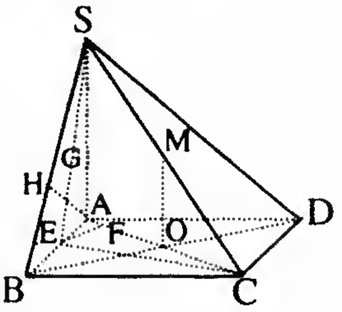
a. Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Hãy dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

d. Tính khoảng cách từ trọng tâm của ΔSAB đến (SAC).

Giải



a. Gọi M là trung điểm của SC.

Trong ΔSAC, ta có:

OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM // SA \Rightarrow OM \perp (ABCD)$.

Vậy OM là đường thẳng cần dựng.

b. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$

Hạ AH vuông góc với SB, ta có ngay $AH \perp (SBC)$.

Vậy AH là đường thẳng cần dựng.

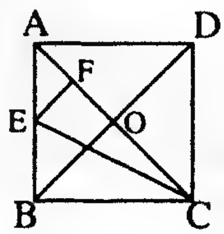
Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. Vì $AO \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O,(SBC)) = \frac{1}{2} d(A,(SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

d. Gọi E là trung điểm AB, hạ $EF \perp AC$, ta được:



$$\begin{cases} EF \perp AC \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAC)$$

do đó EF chính là khoảng cách từ E tới (SAC).

Trong ΔOAB, ta có:

EF là đường trung bình $\Rightarrow EF = \frac{1}{2} OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, vì $EG \cap (SAC) = S$ nên:

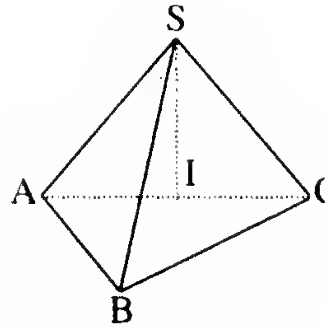
$$\frac{d(G,(SAC))}{d(E,(SAC))} = \frac{GS}{ES} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G,(SAC)) = \frac{2}{3} d(E,(SAC)) = \frac{2}{3} EF = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 120^0$ và $SA = SB = SC = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AC.

a. Chứng minh rằng $SI \perp (ABC)$.

b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Giải



a. Trong ΔSAB vuông cân tại S, ta có:

$$AB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Trong ΔSBC cân tại S có $\widehat{BSC} = 60^0$ nên là tam giác đều, suy ra $BC = a$.

Trong ΔSAC cân tại S, ta có:

$\widehat{SAC} = 30^0$,

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 3a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Nhận xét rằng:

$$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại B $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy với $SA = SB = SC$, ta được:

$SI \perp (ABC)$ và $d(S, (ABC)) = SI$.

b. Trong ΔSAI vuông tại I, ta có:

$$SI = SA.\sin\widehat{SAI} = SA.\sin\widehat{SAC} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$$

Vậy, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{a}{2}$.

Bài toán 3: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α, để tính khoảng cách giữa d và α ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Chọn một điểm A trên d, sao cho khoảng cách từ A đến α có thể được xác định dễ nhất.

   Bước 2: Kết luận $d(d, \alpha) = d(A, \alpha)$.

2. Cho hai mặt phẳng song song α và β, để tính khoảng cách giữa α và β ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Chọn một điểm A trên α, sao cho khoảng cách từ A đến β có thể được xác định dễ nhất.

   Bước 2: Kết luận $d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC.

a. Chứng minh rằng (MNP) // (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

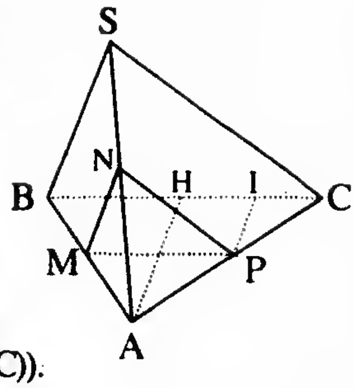
Giải

a. Vì M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC nên:

MN // SB, do MN là đường trung bình trong ΔSAB

MP // BC, do MP là đường trung bình trong ΔABC

suy ra (MNP) // (SBC).



b. Từ kết quả câu a), ta có:

$d((MNP), (SBC)) = d(P, (SBC))$.

Mặt khác ta lại có $AP \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(P,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{PC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(P, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)).$$

Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay $AH \perp (SBC)$. Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Vì ΔABC đều có cạnh bằng a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, suy ra:

$$d(P, (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

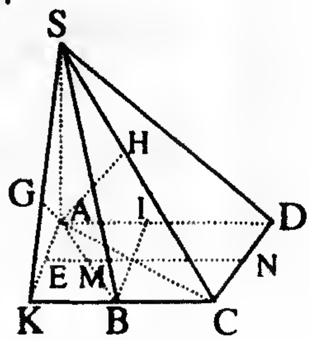
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.

a. Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Giải



a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC).$$

Hạ AH vuông góc với SC, ta có ngay $AH \perp (SCD)$.

Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SCD).

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm AD, suy ra:

$BI // CD \Rightarrow BI // (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$.

Mặt khác, ta lại có $AI \cap (SCD) = D$ nên:

$$\frac{d(I,(SCD))}{d(A,(SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

$AD // CD \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Hạ AK vuông góc với BC, ta được:

$$\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK) \text{ và } (SBC) \cap (SAK) = AK.$$

Hạ AG vuông góc với SK, ta có ngay $AG \perp (SBC)$.

Vậy AG là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Trong ΔSAK vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} AK \perp AD \\ AK \perp SA \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SAD).$$

Giả sử mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) cắt AK tại E, khi đó:

$$d(\alpha, (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AK.$$

Ta đi xác định thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α qua E và song song với (SAD), như sau:

$$\begin{cases} \alpha // (SAD) \\ \alpha \cap (ABCD) = Ex \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow Ex // AD$$

và Ex cắt AB, CD theo thứ tự tại M, N là trung điểm của mỗi đoạn.

Trong mặt phẳng (SAB) dựng My // SA và cắt SB tại Q là trung điểm của SB.

Trong mặt phẳng (SCD) dựng Nz // SD và cắt SC tại P là trung điểm của SC.

Vậy, thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α là MNPQ, ngoài ra vì:

$MN // CD // PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thang

$MQ // SA \Rightarrow MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \perp MN \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

trong đó:

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{3a}{2}$$, vì MN là đường trung bình của ABCD,

$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$$, vì PQ là đường trung bình của ΔSBC,

$$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAB,

suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Bài toán 4: Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

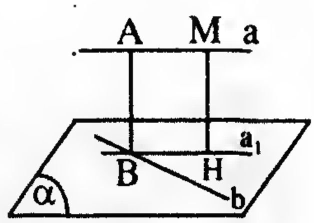
1. Để dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng α chứa b song song với a.

Bước 2: Chọn M trên a, dựng MH vuông góc với α tại H.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng a_1 song song với a, và cắt b tại B.



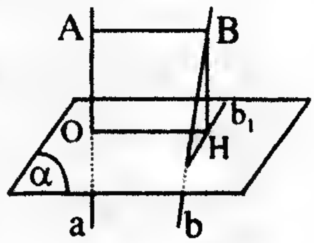
Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt α tại A. Đoạn AB là đoạn thẳng vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng α vuông góc với a và tại O.

Bước 2: Dựng hình chiếu vuông góc b_1 của b trên α. Dựng chiếu vuông góc H của O trên b_1.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.

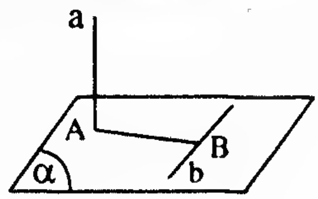


Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A. Đoạn AB là doạn vuông góc chung của a và b.

Cách 3: (*Áp dụng cho trường hợp* $a \perp b$): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng α chứa b, vuông góc với a tại A.

Bước 2: Dựng $AB \perp b$ tại B. Đoạn AB là doạn vuông góc chung của a và b.



2. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Tính độ dài đoạn vuông góc chung (nếu có).

Cách 2: Tính d(a, α) với α là mặt phẳng chứa b song song với a.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a. SB và AD.

b. SC và BD.

c. SB và CD.

d. SC và AD.

e. SB và AC.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$AD \perp AB$, vì ABCD là hình vuông

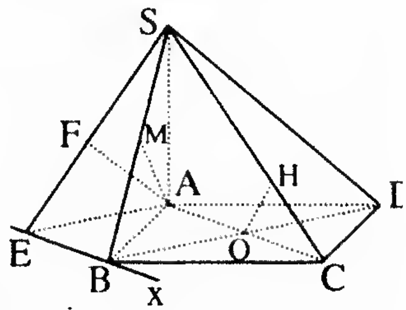
$AD \perp SA$, vì SA vuông góc với (ABCD)

suy ra $AD \perp (SAB)$.

Dựng AM vuông góc với SB thì AM là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

Trong ΔSAB vuông cân tại A, ta có:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b. Nhận xét rằng:

$BD \perp AC$, vì ABCD là hình vuông

$BD \perp SA$, vì SA vuông góc với (ABCD)

suy ra $BD \perp (SAC)$.

Dựng OH vuông góc với SC thì OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Nhận xét rằng ΔHCO và ΔACS là hai tam giác vuông có chung góc nhọn $\hat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA.OC}{SC}$$

trong đó:

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}$$

suy ra:

$$OH = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c. Nhận xét rằng:

$CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = a.$

Vậy, khoảng cách giữa SB và CD bằng a.

d. Nhận xét rằng:

$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

$$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SC và AD bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e. Dựng:

$Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (S, Bx) \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (S, Bx))$

Hạ AE vuông góc với Bx, ta được:

$$\begin{cases} Bx \perp AE \\ Bx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (S, Bx) \Rightarrow (S, Bx) \perp (SAE) \text{ và } (S, Bx) \cap (SAE) = SE.$$

Hạ AF vuông góc với SE, ta có ngay $AE \perp (S, Bx)$.

Vậy AF là khoảng cách từ điểm A tới (S, Bx).

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$AE = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

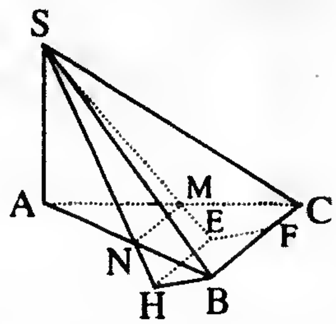
Vậy, khoảng cách giữa SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AB = a. Gọi M là trung điểm của AC.

a. Hãy dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Giải



a. Để dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Gọi N là trung điểm AB, suy ra:

$BC \parallel MN \Rightarrow BC \parallel (SMN).$

Ta có:

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB) \text{ và } (SMN) \cap (SAB) = SN.$$

Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Do đó (SAB) chính là mặt phẳng qua B thuộc BC và vuông góc với BC.

Gọi N là trung điểm AB, suy ra:

$$MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

suy ra SN là hình chiếu vuông góc của SM trên (SAB).

Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Nhận xét rằng ΔSAN và ΔBHN là hai tam giác vuông có hai góc nhọn đối đỉnh nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{BH}{SA} = \frac{BN}{SN} \Rightarrow BH = \frac{SA.BN}{SN}$$

trong đó:

$$BN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

$$SN^2 = SA^2 + AN^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17a^2}{4} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

suy ra:

$$BH = \frac{2a.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SM và BC bằng $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$ và có đường cao SO = a.

a. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

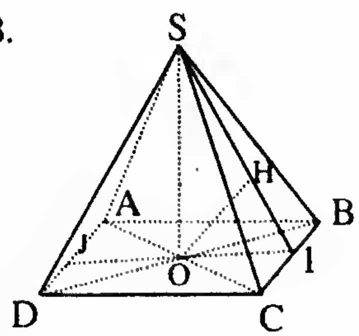
Giải

a. Hạ OI vuông góc với BC và kéo dài OI cắt AD tại J.

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$$

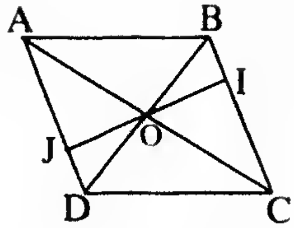
$$\Rightarrow (SBC) \perp (SOI) \text{ và } (SBC) \cap (SOI) = SI$$



Hạ OH vuông góc với SI, ta có ngay OH ⊥ (SBC).

Vậy OH là khoảng cách từ điểm O tới (SBC).

Với hình thoi ABCD, ta có:



$$BD = a, \text{ vì } \Delta ABD \text{ đều} \Rightarrow OB = \frac{a}{2}$$

$$AC = 2AO = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{13}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{39}/13)^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách từ O đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. Nhận xét rằng:

$AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(J, (SBC))$.

Mặt khác, ta lại có $JO \cap (SBC) = I$ nên:

$$\frac{d(J,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{JI}{OI} = 2 \Rightarrow d(J,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = 2OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

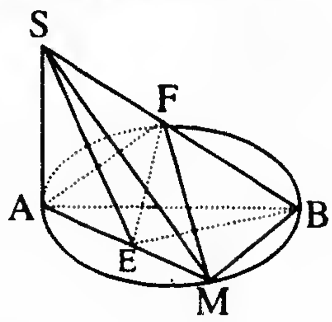
Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho đường tròn đường kính AB = 2R chứa trong mặt phẳng α, SA vuông góc với mặt phẳng α và SA = h, với 0 < h < 2R. Gọi M là một điểm di động trên đường tròn. Xác định vị trí của M để đoạn nối trung điểm hai đoạn AM và SB là đoạn thẳng vuông góc chung của chúng, khi đó tính độ dài của đoạn vuông góc chung này.

Giải

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AM và SB.

Nhận xét rằng, dựa trên tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, ta có:



$$AF = \frac{1}{2}SB \text{ và } MF = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{h^2 + 4R^2}}{2}$$

$\Rightarrow MF = AF \Leftrightarrow \Delta AFM$ cân tại F

$\Rightarrow EF \perp AM$.

Như vậy, để EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB điều kiện là:

$EF \perp SB \Leftrightarrow \Delta ESB$ cân tại $E \Leftrightarrow SE = BE$. (1)

Đặt AE = x, suy ra ME = x.

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow SE = \sqrt{h^2 + x^2}. \qquad (2)$$

Trong ΔEMB vuông tại M, ta có:

$$BE^2 = BM^2 + ME^2 = (AB^2 - AM^2)^2 + ME^2$$
$$= 4R^2 - 4x^2 + x^2 = 4R^2 - 3x^2$$
$$\Rightarrow BE = \sqrt{4R^2 - 3x^2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{4R^2 - 3x^2} \Leftrightarrow h^2 + x^2 = 4R^2 - 3x^2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2} \Rightarrow AM = 2x = \sqrt{4R^2 - h^2}.$$

Trong ΔMEF vuông tại E, ta có:

$$EF^2 = MF^2 - ME^2 = \frac{h^2 + 4R^2}{4} - \frac{4R^2 - h^2}{4} = \frac{h^2}{2} \Rightarrow EF = \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, với điểm M thuộc đường tròn sao cho $AM = \sqrt{4R^2 - h^2}$ thì EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB, và khi đó $EF = \frac{h\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD có BC = a, AC = b, AB = c, AD = d và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng BC.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông đường cao AB = a, BC = 2a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Ngoài ra còn có SC vuông góc với BD.

a. Chứng minh rằng ΔSBC vuông.

b. Tính độ dài AD.

c. Gọi M là một điểm trên đoạn SA, đặt AM = x, với $0 \le x \le a$. Tính khoảng cách từ D đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là điểm di động trên đoạn CD, đặt CM = x. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a. Tính độ dài đoạn SK theo a và x.

b. Tìm tập hợp các điểm K thoả mãn tính chất trên.

Bài tập 5: Cho tứ diện OABC vuông tại O, OA = a, OB = b, OC = c. Tính khoảng cách:

a. Từ A đến đường thẳng BC.

b. Từ B đến đường thẳng AC.

c. Từ C đến đường thẳng AB.

Bài tập 6: Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều hai điểm A, B cho trước ?

Bài tập 7: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác cân đỉnh A, AB = 2a, $\widehat{BAC} = \alpha$, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC). Tìm điều kiện của α để bài toán có nghĩa.

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A với BC = 2a, AB = a. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biết $SA = SC = SM = a\sqrt{3}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).
b. Tính khoảng cách từ S đến AB.

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và BC = 2a, SB = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng (SAB) $\perp$ (SAC)
b. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).
c. Gọi O là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ O đến (SAC).

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi I là trung điểm của SB. Chứng minh rằng AI $\perp$ (SBC).
b. Tính khoảng cách từ trọng tâm ΔSCD đến mặt phẳng (ABCD).

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, SA = 3a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của cạnh SC, CD

a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).
d. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).
e. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Bài tập 13: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC = a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) với SH = 2a.

a. Hãy dựng đường thẳng qua H vuông góc với mặt phẳng (SCD) và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).
b. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).
c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài tập 14: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

a. Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).
b. Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Bài tập 15: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{CSB} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 90^0$.

a. Chứng tỏ rằng ΔABC là tam giác vuông.
b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Bài tập 16: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

Bài tập 17: Cho hình chóp S.ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a. Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

Bài tập 18: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AA_1 = 2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 4a, AC = 2a.

a. Tính khoảng cách từ AA_1 đến mặt phẳng (BCC_1B_1).

b. Tính khoảng cách từ A đến (A_1BC).

c. Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng (ACC_1A_1) và tính khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng (ABC_1).

d. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BMN) và (A_1C_1P).

Bài tập 19: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABC cạnh bằng a. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC.

a. Chứng minh rằng (MNP) // (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Bài tập 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = 2a, $CC_1 = 3a$.

a. Tính khoảng cách từ CC_1 đến mặt phẳng (BDD_1B_1).

b. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AA_1, BB_1. Tính khoảng cách từ MN đến mặt phẳng (ABC_1D_1).

c. Chứng minh rằng (AB_1D_1) // (C_1BD). Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (C_1BD).

Bài tập 21: Cho hình chóp S.ABCD có SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = $\frac{a}{2}$, AD = a.

a. Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a}{6}$.

Bài tập 22: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

a. Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b.

b. Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó, đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

c. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

d. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

e. Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Bài tập 23: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a. Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').
b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').
c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Bài tập 24: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD).
b. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Bài tập 25: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a. Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và B'C.
b. Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C.

Bài tập 26: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').
b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

Bài tập 27: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AC' = 2a.

a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').
b. Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Bài tập 28: Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD và AD = BC.

Bài tập 29: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

Bài tập 30: Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Bài tập 31: Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a. Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.
b. Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).
c. Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài tập 32: Tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có AB = a, AC = b. Tam giác ADC vuông tại D có CD = a.

a. Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.
b. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Bài tập 33: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

a. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.
b. Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Bài tập 34: Cho hình chóp S.ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD).

b. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K. Hãy tính khoảng cách đó theo a.

Bài tập 35: Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = AD = a và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^0$. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện A'ABD.

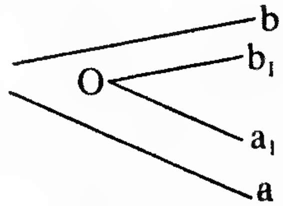
Bài tập 36: Cho tứ diện ABCD có bốn mặt là bốn tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ diện cũng là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đó.

CHỦ ĐỀ 6

GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG



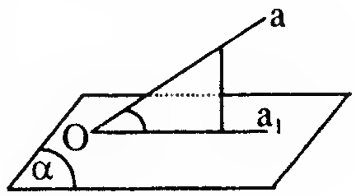
***Định nghĩa**: Góc giữa hai đường thẳng bất kì a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đó*, kí hiệu là (a, b) hay (b, a).

Đặc biệt:

- Khi a và b trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(a, b) = 0^0$.
- Khi a và b vuông góc thì $(a, b) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (a, b) \le 90^0$.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



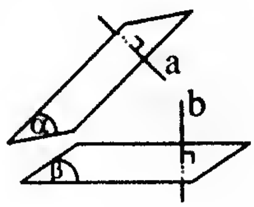
***Định nghĩa**: Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng α là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a_1 của nó trên α*, kí hiệu là (a, α) hay (α, a).

Đặc biệt:

- Khi a thuộc α hoặc a song song với α thì $\widehat{(a, b)} = 0^0$.
- Khi a vuông góc với α thì $(a, \alpha) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (a, \alpha) \le 90^0$.

3. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



***Định nghĩa**: Góc giữa hai mặt phẳng α và β là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó*, kí hiệu là (β, α) hay (α, β).

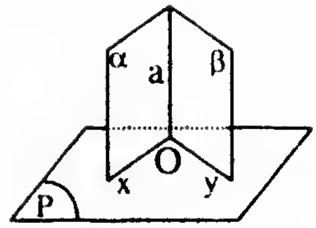
Đặc biệt:

- Khi α và β trùng nhau hoặc song song với nhau thì $\widehat{(a, b)} = 0^0$.
- Khi α vuông góc với β thì $(\alpha, \beta) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (\alpha, \beta) \le 90^0$.

4. NHỊ DIỆN

***Định nghĩa**: Hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng α và β có chung bờ a được gọi là nhị diện*, kí hiệu là [α, a, β] hoặc [α, β].

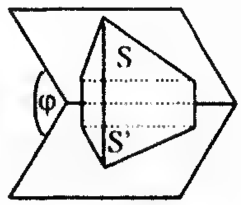


Cắt nhị diện [α, a, β] bởi mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm O và cắt α, β theo thứ tự là các nửa đường thẳng Ox và Oy. Khi đó, góc xOy được gọi là *góc phẳng của nhị diện* [α, a, β], kí hiệu Sđ[α, β] hoặc viết tắt [α, β].

Đặc biệt, khi α vuông góc với β thì [α, β] = 90^0, ta nói [α, β] là *nhị diện vuông*. Như vậy, ta luôn có $0 \le [\alpha, \beta] \le 180^0$.

5. DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT TAM GIÁC

***Định lí**: Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt chiếu.*



Tức là:

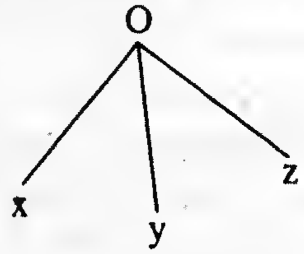
$$S' = S.\cos\varphi.$$

***Hệ quả**: Nếu S là diện tích của một đa giác phẳng, S' là diện tích của đa giác chiếu và φ là góc giữa mặt phẳng của đa giác và mặt phẳng chiếu thì ta có:*

$$S' = S.\cos\varphi.$$

6. TAM DIỆN

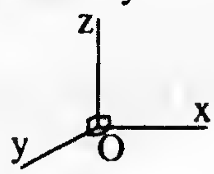
***Định nghĩa**: Hình hợp bởi ba tia* Ox, Oy, Oz *không đồng phẳng được gọi là một tam diện*, kí hiệu là Oxyz.



Trong đó:

- Các tia Ox, Oy, Oz gọi là các *cạnh* của tam diện.
- Các miền góc xOy, yOz, zOx được gọi là các *mặt* của tam diện.
- Độ lớn của các góc xOy, yOz, zOx gọi là *góc phẳng ở đỉnh* của tam diện.

Một tam diện gọi là *tam diện vuông* nếu ba góc phẳng ở đỉnh của nó đều là góc vuông.



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Góc giữa hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

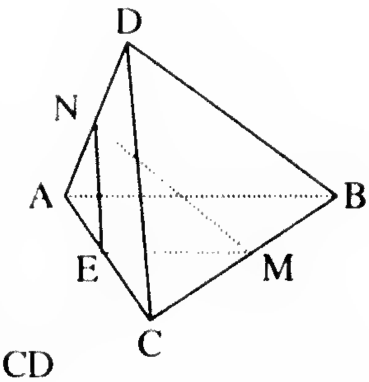
Chúng ta đã thu nhận được phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong chủ đề 1.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và MN = $a\sqrt{2}$.

Giải

Gọi E là trung điểm AC, ta có:

$$\begin{cases} EM // AB \\ EN // CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = \widehat{MEN}.$$



Trong ΔMEN, ta có:

$ME = \frac{1}{2}AB = a$, vì ME là đường trung bình trong ΔABC

$NE = \frac{1}{2}CD = a$, vì NE là đường trung bình trong ΔACD

suy ra:

$$ME^2 + NE^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = MN^2 \Leftrightarrow \Delta MEN \text{ vuông tại } E \Leftrightarrow \widehat{MEN} = 90^0.$$

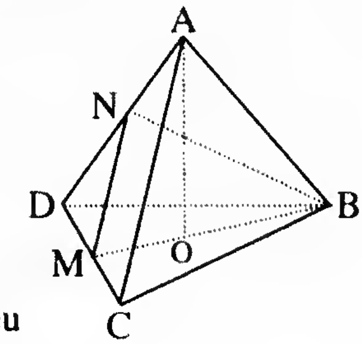
Vậy, góc giữa AB và CD bằng 90^0.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

a. Chứng minh rằng $AO \perp CD$.

b. Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Giải



a. Ta có ngay kết luận $AO \perp CD$ vì A.BCD là hình chóp tam giác đều.

b. Gọi N là trung điểm AD, ta có:

$MN // AC \Rightarrow (AC, BM) = \widehat{BMN}$.

Xét ΔBMN, ta có:

$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, vì BM là trung tuyến trong ΔABC đều

$BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, vì BN là trung tuyến trong ΔABD đều

$MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, vì MN là đường trung bình trong ΔACD

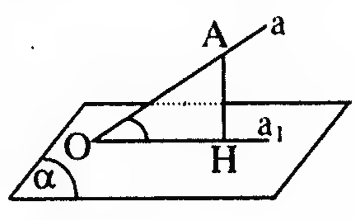
$$\cos\widehat{BMN} = \frac{MB^2 + MN^2 - BN^2}{2MB.MN} = \frac{MN}{2MB} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy, ta được $\cos(AC, BM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài toán 2: Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao điểm O của a với α.

Bước 2: Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp \alpha$, với $H \in \alpha$. Khi đó $\widehat{AOH} = (a, \alpha)$

Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng giác.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại A, BC = a, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC).

b. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Giải

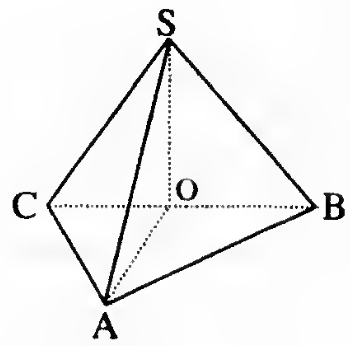
a. Gọi O là trung điểm của BC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ngoài ra, theo giả thiết ta có SA = SB = SC nên SO là trục đường tròn của ba ΔABC, suy ra:

$SO \perp (ABC)$ và $SO = d(S, (ABC))$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có:

$OA = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, trung tuyến thuộc cạnh huyền



$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Vì $SO \perp (ABC)$ nên OA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC), do đó:

$(SA, (ABC)) = \widehat{SAO}$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có:

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, ta được $\cos(SA, (ABC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0.

a. Tính MN và SO.

b. Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

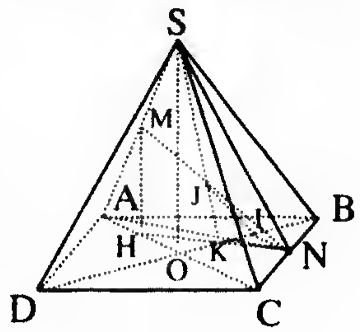
Giải

a. Gọi H là trung điểm OA, suy ra:

$MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

suy ra NH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABCD), do đó:

$(MN, (ABCD)) = \widehat{MNH} = 60^0$.



Trong ΔHNC, ta có:

$$NH^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos\widehat{NCH}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos45^0 = \frac{10a^2}{16}$$

$$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Trong ΔHMN vuông tại H, ta có:

$$MN = \frac{NH}{\cos\widehat{MNH}} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$MH = NH.\tan\widehat{MNH} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.\tan60^0 = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Trong ΔOSA, ta có MH là đường trung bình nên:

$$SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

b. Giả sử:

$$AN \cap BD = K \Rightarrow (SAN) \cap (SBD) = SK$$

Giả sử:

$$MN \cap SK = J \Rightarrow MN \cap (SBD) = J.$$

Gọi I là trung điểm OB, ta có:

$$NI \,//\, OC \Rightarrow \begin{cases} NI \perp BD \\ NI \perp SO \end{cases} \Rightarrow NI \perp (SBD)$$

suy ra IJ là hình chiếu vuông góc của MN trên (SBD), do đó:

$$(MN, (SBD)) = \widehat{NJI}.$$

Trong ΔOBC có NI là đường trung bình nên:

$$NI = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Trong ΔABC có trung tuyến AN và BO nên K là trọng tâm, suy ra:

$$\frac{KA}{KN} = 2.$$

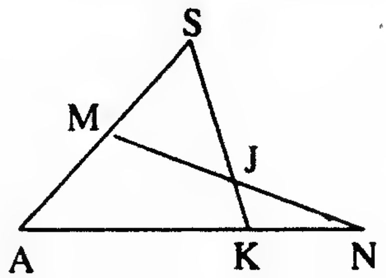
Dựa vào hình bên, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{KA}{KN}.\frac{JN}{JM}.\frac{SM}{SA} = 1 \Leftrightarrow 2.\frac{JN}{JM}.\frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{JN}{JM} = 1 \Leftrightarrow JN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Trong ΔNIJ vuông tại I, ta có:

$$\sin\widehat{NIJ} = \frac{NI}{JN} = = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy, ta được $\sin(MN, (SBD)) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

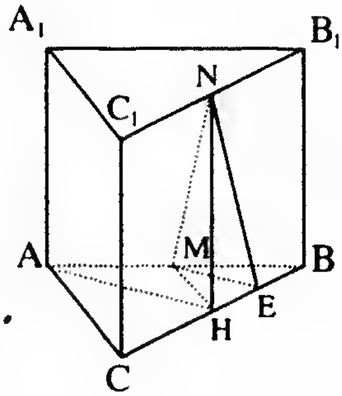


Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân tại A. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B_1C_1 có độ dài bằng a. MN hợp với đáy góc α và mặt bên (BCC_1B_1) góc β.

a. Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b. Chứng minh rằng $\cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta$.

Giải



a. Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$NH // BB_1 \Rightarrow NH \perp (ABC)$

suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABC), do đó:

$(MN, (ABC)) = \widehat{NMH} = \alpha$.

Ngoài ra:

$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC_1B_1)$.

Gọi E là trung điểm BH, suy ra:

$ME // AH \Rightarrow ME \perp (BCC_1B_1)$

suy ra NE là hình chiếu vuông góc của MN trên (BCC_1B_1), do đó:

$(MN, (BCC_1B_1)) = \widehat{MNE} = \beta$.

Trong ΔMNH vuông tại H, ta có:

$MH = MN.\cos\widehat{NMH} = a.\cos\alpha$.

$NH = MN.\sin\widehat{NMH} = a.\sin\alpha \Rightarrow AA_1 = a.\sin\alpha$.

Trong ΔABC cân tại A, vì MH là đường trung bình nên:

$AB = AC = 2MH = 2a.\cos\alpha$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}\,a.\cos\alpha$.

$AH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}\,a.\cos\alpha$.

b. Trong ΔMNE vuông tại E, ta có:

$$\sin\beta = \frac{ME}{MN} = \frac{\frac{1}{2}AH}{MN} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a.\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta.$$

Bài toán 3: Góc giữa hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

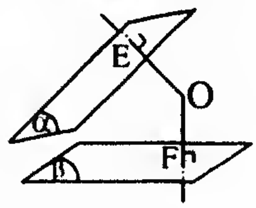
Để tính góc giữa hai mặt phẳng α và β, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn điểm O, từ đó hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với α và β.

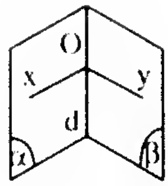
Bước 2: Tính số đo của góc $E\hat{O}F$.

Bước 3: Khi đó:



- $(\alpha, \beta) = E\hat{O}F$, nếu $E\hat{O}F \le 90^0$.
- $(\alpha, \beta) = 180^0 - E\hat{O}F$, nếu $E\hat{O}F > 90^0$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao tuyến d của α và β.

Bước 2: Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong α dựng $Ox \perp d$.
- Trong β dựng $Oy \perp d$.

Bước 3: Tính số đo của góc xOy.

Bước 4: Khi đó:

- $(\alpha, \beta) = xOy$, nếu $x\hat{O}y \le 90^0$.
- $(\alpha, \beta) = 180^0 - x\hat{O}y$, nếu $x\hat{O}y > 90^0$.

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A có cạnh huyền BC thuộc mặt phẳng (P). Gọi β, γ là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC với (P). Gọi α là góc hợp bởi (ABC) với (P). Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Giải

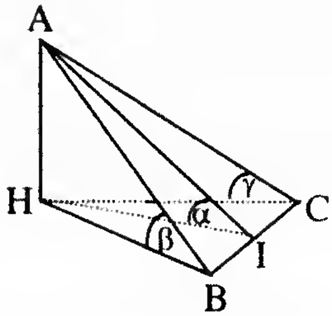
Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng (P), ta được:

$\widehat{ABH} = \beta$ và $\widehat{ACH} = \gamma$.

Kẻ HI vuông góc với mặt phẳng BC, suy ra:

$BC \perp AI$, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{AIH} = \alpha$.



Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{IA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{AH^2}{IA^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

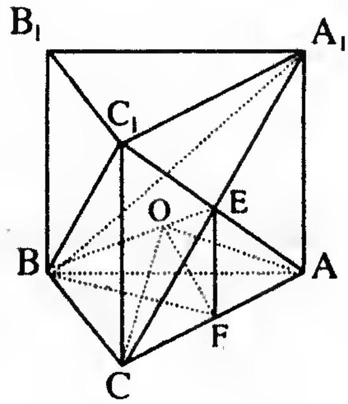
Giải

Gọi E là tâm hình vuông (ACC_1A_1), suy ra:

$(ABC_1) \cap (BCA_1) = BE$

Trong (EBC), hạ $CO \perp BE$, $O \in BE$, ta có:

$$\begin{cases} BE \perp CO \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \perp (OAC) \Rightarrow BE \perp OA.$$



Vậy, ta nhận được góc $A\hat{O}C$.

Gọi F là trung điểm AC, trong ΔBEF vuông tại F, ta có:

$EF = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{a}{2}$, vì nó là đường trung bình

$BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, trung tuyến trong một tam giác đều

$$\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{EF^2} + \frac{1}{BF^2} = \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong ΔOFA vuông tại F, ta có:

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{16} \Rightarrow OA = OC = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Trong ΔOAC, ta có:

$$\cos\hat{AOC} = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA.OC} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \hat{AOC} \text{ tù.}$$

Vậy, ta được:

$$((ABC_1), (BCA_1)) = 180^0 - \hat{AOC}$$

$$\Rightarrow \cos((ABC_1), (BCA_1)) = \cos(180^0 - \hat{AOC}) = -\cos\hat{AOC} = \frac{1}{7}.$$

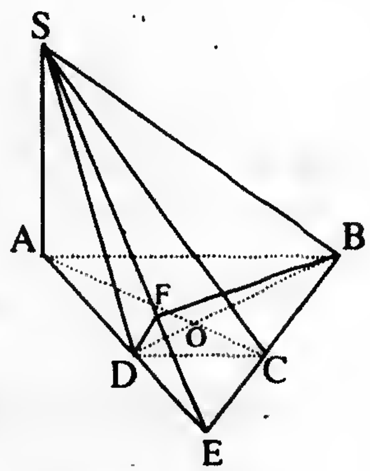
__Ví dụ 3:__ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:



Cách 1: (Dựng góc dựa trên giao tuyến): Giả sử:

$$AD \cap BC = E \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SE.$$

Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

suy ra:

$$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SE$$

Hạ $DF \perp SE$ tại F, suy ra:

$$(BDF) \perp SE$$

Như vậy, ta được một góc phẳng giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\widehat{BFD}$.

Vì ΔABE đều nên $AE = AB = 2a$.

Vì ΔCDE đều nên $DE = CD = a$.

Trong ΔSAE vuông tại S, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2 \Rightarrow SE = a\sqrt{7}.$$

Hai tam giác vuông SAE và DFE có chung góc Ê nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{DF}{SA} = \frac{DE}{SE} \Rightarrow DF = \frac{SA.DE}{SE} = \frac{a\sqrt{3}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có: $BD = AB.\sin B\hat{A}D = 2a.\cos 60^0 = a\sqrt{3}$.

Trong ΔBDF vuông tại D, ta có:

$$\tan\widehat{BFD} = \frac{BD}{DF} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \sqrt{7} \Rightarrow \widehat{BFD} \text{ nhọn.}$$

Vậy, ta được $\tan((SAD), (SBC)) = \sqrt{7}$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

suy ra $BD \perp (SAD)$. (1)

Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

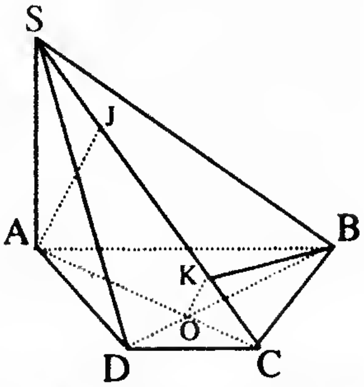
$BC \perp SA$, giả thiết

suy ra: $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC)$. (2)

Trong (SAC) hạ $OK \perp SC$ tại K, suy ra $OK \parallel AJ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $((SAD), (SBC)) = (BD, AJ) = (BD, OK) = K\hat{O}B$.

Trong nửa lục giác đều ABCD, ta có:



$$OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại S, ta có:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + (AB^2 - BC^2)$$

$$= \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (4a^2 - a^2) = 6a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{6}.$$

Hai tam giác vuông SAC và OKC có chung góc nhọn $\hat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong ΔKOB vuông tại K, ta có:

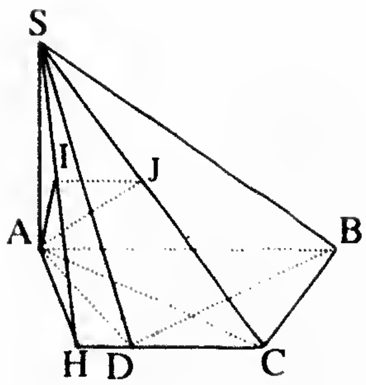
$$\cos K\hat{O}B = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy, ta được $\cos((SAD), (SBC)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết



suy ra:

$$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC). \quad (4)$$

Hạ $AH \perp CD$ tại H, suy ra:

$$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH)$$

$$\Rightarrow (SCD) \perp (SAH) \text{ và } (SCD) \perp (SAH) = SH.$$

Hạ $AI \perp SH$ tại I, suy ra $AI \perp (SCD)$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra

$$((SCD), (SBC)) = I\hat{A}J.$$

Trong ΔSAH vuông tại A, ta có:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$AC = SA = a\sqrt{3} \Rightarrow AJ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Trong ΔAIJ vuông tại I, ta có:

$$\cos I\hat{A}J = \frac{AI}{AJ} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{5}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy, ta được $\cos((SCD), (SBC)) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

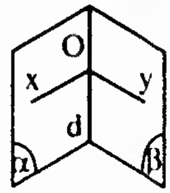
Bài toán 4: Góc nhị diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã biết được phương pháp giải bài toán về góc giữa hai mặt phẳng với hai cách xác định góc trung gian để tính (vì góc giữa hai mặt phẳng chỉ nhận giá trị từ 0^0 đến 90^0). Tuy nhiên, đối với bài toán về số đo của góc nhị diện thông thường chúng ta cần xác định được góc phẳng, do vậy cần thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định cạnh của nhị diện và góc phẳng nhị diện.

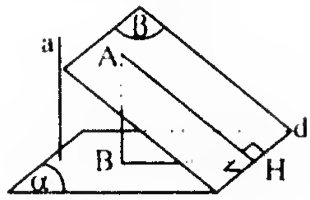
Bước 2: Tính số đo của góc phẳng nhị diện dựa trên các hệ thức lượng giác trong tam giác.



Chú ý: Để thực hiện được bước 1 chúng ta thường sử dụng một trong ba kết quả sau:

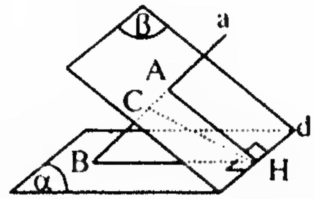
1. Nếu có đường thẳng $a \perp \alpha$ thì lựa chọn một điểm A thuộc β rồi:
   - Dựng $Ax \,//\, a$ và cắt β tại B.
   - Hạ AH (hoặc BH) vuông góc với d tại H.

   Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.



2. Nếu có một đường thẳng a cắt hai mặt của nhị diện tại A, B và vuông góc với cạnh d của nhị diện thì ta có thể dựng góc phẳng của nhị diện đó như sau:
   - Hạ AH (hoặc BH hoặc CH với C là điểm bất kì trên a) vuông góc với d tại H.

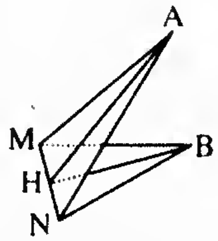
   Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.



3. Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân AMN và BMN có chung đáy MN thì:
   - Gọi H là trung điểm MN, suy ra:

     $$HA \perp MN \text{ và } HB \perp MN$$

   Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.



<u>Ví dụ 1:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính số đo nhị diện (S, BC, A).

b. Tính số đo nhị diện (A, SB, C).

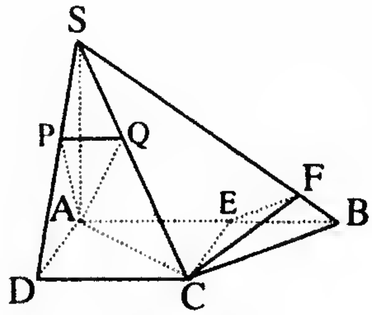
c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải

a. Ta có ngay:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp SC \in (S, BC) \\ BC \perp AC \in (A, BC) \end{cases}$$



suy ra $\widehat{SCA}$ là góc phẳng nhị diện (S, BC, A).

Gọi E là trung điểm AB, suy ra $AE = BE = a$ và $CE = a$.

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$AC = a\sqrt{2}$, vì AC là đường chéo của hình vuông ADCE

$\Rightarrow AC = SA \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A $\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$.

Vậy, số đo nhị diện (S, BC, A) bằng 45^0.

b. Ta có:

$$\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB).$$

Hạ $CF \perp SB$ tại F, suy ra:

$EF \perp SB$, theo định lí ba đường vuông góc

Do đó, góc $\widehat{CFE}$ là góc phẳng nhị diện (A, SB, C).

Hai tam giác vuông SAB và EFB có chung góc nhọn $\hat{B}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{EF}{SA} = \frac{EB}{SB} \Rightarrow EF = \frac{SA.EB}{SB} = \frac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔCEF vuông tại E, ta có:

$$\tan\widehat{CFE} = \frac{CE}{EF} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CFE} = 60^0.$$

Vậy, số đo nhị diện (A, SB, C) bằng 60^0.

c. Hạ $AP \perp SD$ tại P, suy ra:

$$\begin{cases} AP \perp SD \\ AP \perp CD \end{cases} \Rightarrow AP \perp (SCD). \qquad (1)$$

Hạ $AQ \perp SC$ tại Q, suy ra:

$$\begin{cases} AQ \perp SC \\ AQ \perp BC \end{cases} \Rightarrow AQ \perp (SBC). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $((SCD), (SBC)) = \hat{PAQ}$.

Trong ΔSAD vuông tại A, ta có:

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow SD = a\sqrt{3},$$

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AQ = \frac{SC\sqrt{2}}{2} = a.$$

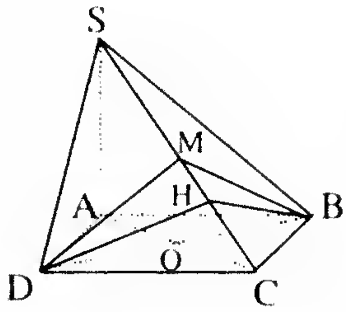
Trong ΔAPQ vuông tại P, ta có:

$$\cos\hat{PAQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy, ta được $\cos((SBC), (SCD)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính số đo nhị diện (B, SC, D).

Giải



Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = 2a$.

Gọi M là trung điểm của SC, suy ra:

$BM = \frac{1}{2}SC = a$, vì ΔSBC vuông tại B

$\Rightarrow \Delta BMC$ cân tại B

$DM = \frac{1}{2}SC = a$, vì ΔSDC vuông tại D

$\Rightarrow \Delta DMC$ cân tại D

Gọi H là trung điểm CM, suy ra $\widehat{BHD}$ là góc phẳng nhị diện (B, SC, D).

Trong ΔBHD, ta có:

$BD = a\sqrt{2}$,

$$HD = HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{SC}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

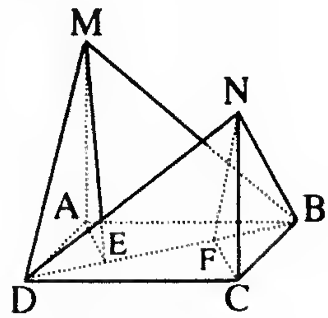
$$\cos\widehat{BHD} = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB.HD} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, nhị diện (B, SC, D) có $\cos(B, SC, D) = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a, AD = b. Trên hai tia Ax, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, BD, N) có số đo bằng 60^0 là:

$$\frac{(x+y)ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}\left(xy - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Giải



Ta dựng:

- AE vuông góc với BD tại E
- CF vuông góc với BD tại F

suy ra $\widehat{AEN}$ và $\widehat{CFN}$ theo thứ tự là góc nhị diện của (A, BD, M) và (C, BD, N).

Ta có:

$$(A, BD, M) + (M, BD, N) + (C, BD, N) = (A, BD, C) = 180^0$$

Vậy, điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, BD, N) có số đo bằng 60^0 là:

$$(A, BD, M) + (C, BD, N) = 120^0 \Leftrightarrow \widehat{AEM} + \widehat{CFN} = 120^0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\widehat{AEM} + \widehat{CFN}) = \tan 120^0 \Leftrightarrow \frac{tg\widehat{AEM} + tg\widehat{CFN}}{1 - tg\widehat{AEM}.tg\widehat{CFN}} = -\sqrt{3}. \quad (1)$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow AE = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = CF.$$

Trong ΔAEM vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{AEM} = \frac{AM}{AE} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \quad (2)$$

Trong ΔACFN vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{CFN} = \frac{CN}{CF} = \frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab} + \frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}}{1 - \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.\frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}} = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow ab\sqrt{a^2+b^2}(x+y) = \sqrt{3}[xy(a^2+b^2) - a^2b^2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}\left(xy - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Bài toán 5: Phép chiếu vuông góc và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Từ công thức diện tích hình chiếu:

$$S' = S.\cos\varphi,$$

nếu biết hai trong ba đại lượng S, S', φ ta tính được đại lượng còn lại. Đặc biệt dựa vào công thức này ta có thể tính góc giữa hai mặt phẳng mà không cần dựng góc phẳng.

2. Từ định lí hình chiếu của một góc vuông:

> " *Hình chiếu vuông góc của một góc vuông là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song với mặt chiếu hay nằm trong mặt chiếu* "

ta có thể chứng minh được đường thẳng vuông góc với đường thẳng hay đường thẳng song song với mặt phẳng.

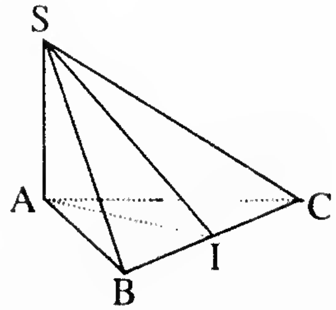
Chú ý: Cần lưu ý đến hai tính chất sau của phép chiếu vuông góc:

1. Nếu đoạn thẳng A_1B_1 là hình chiếu vuông góc của đoạn AB trên mặt phẳng α thì $A_1B_1 \le AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB \parallel \alpha$ hay $AB \subset \alpha$.
2. Phép chiếu vuông góc bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = 2a, SC = $a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 90^0$.

a. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b. Tính diện tích ΔABC.



Giải

a. Hạ $SI \perp BC$ tại I, suy ra:

$AI \perp BC$, định lí ba đường vuông góc.

Suy ra, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SIA} = \varphi$.

Trong ΔSBC vuông tại S, ta có:

$$\frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔSAI vuông tại A, ta có: $\sin\varphi = \dfrac{SA}{SI} = \dfrac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$.

b. Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi = \dfrac{1}{2}SB.SC.\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}.2a.a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có đỉnh A nằm trong mặt phẳng α, hai đỉnh B, C có hình chiếu trên α lần lượt là B_1 và C_1 sao cho ΔAB_1C_1 là tam giác đều cạnh a. Giả sử $CC_1 = a$ và $BB_1 = \dfrac{a}{2}$. Gọi I là giao điểm của BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng $IA \perp AC$.

b. Tính diện tích ΔABC rồi suy ra giá trị của góc φ giữa hai mặt phẳng α và (ABC).

Giải

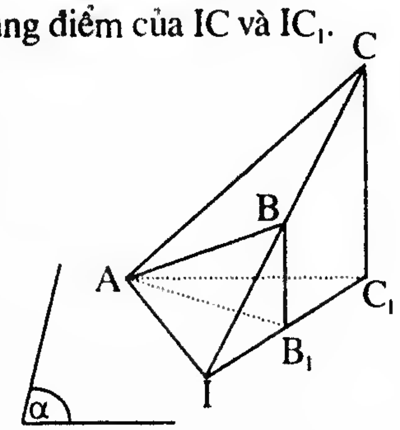
a. Từ giả thiết $CC_1 = 2BB_1$, suy ra B, B_1 theo thứ tự là trung điểm của IC và IC_1.

Trong ΔAIC_1, ta có:

$B_1A = B_1C_1 = B_1I \Rightarrow \Delta AIC_1$ vuông tại A

Vậy, ta có:

$$\begin{cases} IA \perp AC_1 \\ IA \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow IA \perp (ACC_1) \Rightarrow IA \perp AC.$$



b. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{\Delta AIC} = \frac{1}{4} AC.AI \quad (1)$$

trong dó:

$$AC^2 = C_1C^2 + C_1A^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \quad (2)$$

$$AI^2 = C_1I^2 - C_1A^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AI = a\sqrt{3} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}.a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có:

$$S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ vì } \Delta AB_1C_1 \text{ là tam giác đều cạnh a}$$

$$S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta AB_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

<u>Ví dụ 3:</u> Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng α cắt AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt tại A', B', C', D'. Đặt AA' = a, BB' = b, CC' = c, DD' = d. Chứng minh rằng:

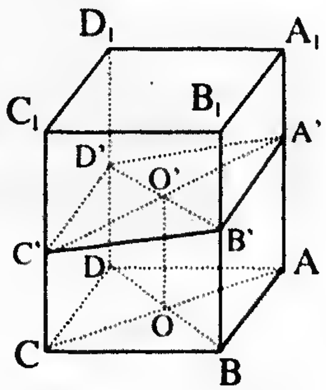
a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành và a + c = b + d.

b. Điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình thoi là a = c hay b = d.

c. Nếu a = b thì A'B'C'D' là hình chữ nhật. Mệnh đề đảo có đúng không ?

Giải

a. Nhận xét rằng:



$$\begin{cases} (ABB_1A_1)//(CDD_1C_1) \\ \alpha \cap (ABB_1A_1) = A'B' \\ \alpha \cap (CDD_1C_1) = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D'.$$

$$\begin{cases} (BCC_1B_1)//(ADD_1A_1) \\ \alpha \cap (BCC_1B_1) = B'C' \\ \alpha \cap (ADD_1A_1) = A'D' \end{cases} \Rightarrow A'D' // B'C'.$$

suy ra, tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

Giả sử $AC \cap BD = O$ và $A'C' \cap B'D' = O'$, ta có:

$$OO' = \frac{1}{2}(AA' + CC'), \text{ vì OO' là đường trung bình của hình thang ACC'A'}$$

$$OO' = \frac{1}{2}(BB' + DD'), \text{ vì OO' là đường trung bình của hình thang BDD'B'}$$

suy ra:

$$\frac{1}{2}(AA' + CC') = \frac{1}{2}(BB' + DD') \Leftrightarrow a + c = b + d, \text{ đpcm.}$$

b. Nhận xét rằng hình chiếu vuông góc của góc A'OB' lên (ABCD) là AÔB.

Để A'B'C'D' là hình thoi điều kiện cần và đủ là:

$$\widehat{A'OB'} = 90^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} O'A' // OA \\ O'B' // OB \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A'C' // AC \\ B'D' // BD \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AA' = CC' \\ BB' = DD' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right..$$

c. Nếu a = b, ta được:

$$AA' = BB' \Rightarrow A'B' // AB \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^0 \Rightarrow A'B'C'D' \text{ là hình chữ nhật.}$$

Thấy ngay, đảo lại không đúng vì với vai trò b, d như nhau nên A'B'C'D' cũng sẽ là hình chữ nhật khi a = d.

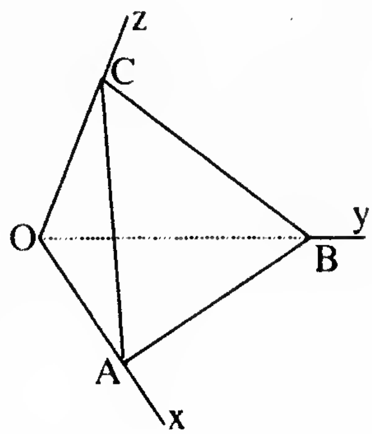
Bài toán 6: Tam diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của tam diện để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của tam diện cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết cho tứ diện.

Ví dụ 1: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và $\widehat{xOy} = 90^0$, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = 60^0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (xOz) và (yOz).

Giải



Trên Oz lấy điểm C sao cho OC = 1.

Trong (xOz) dựng Ct ⊥ Oz và cắt Ox tại A.

Trong (yOz) dựng Cm ⊥ Oz và cắt Oy tại B.

Khi đó, ta được một góc phẳng là $\widehat{ACB}$.

Trong ΔABC, ta có:

$$AC = BC = OC.\tan 60^0 = \sqrt{3},$$

$$AB = OA\sqrt{2} = 2OC\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{2(\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{ACB} \text{ tù.}$$

Vậy, ta được:

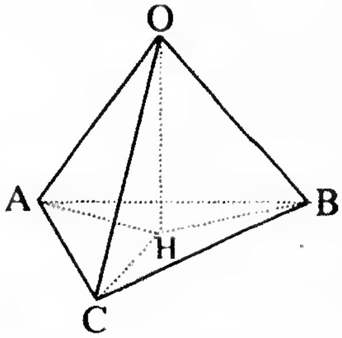
$$((xOz), (yOz)) = 180^0 - \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \cos((xOz), (yOz)) = \cos(180^0 - \widehat{ACB}) = -\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có ba mặt OAB, OAC, OBC là những tam giác vuông tại đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OAB), (OAC), (OBC). Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC).

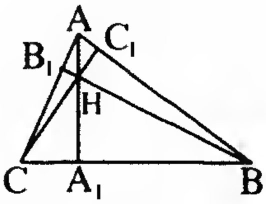
$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

Mặt khác, vì:

$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow (OHA) \perp BC$

$\Rightarrow HA \perp BC.$

Chứng minh tương tự, ta có $HB \perp AC$, do đó H là trực tâm ΔABC.



Đặt OA = a, OB = b, OC = c và giả sử

$AH \cap BC = A_1$, $BH \cap AC = B_1$, $CH \cap AB = C_1$

suy ra $OA_1A = \alpha$, $OB_1B = \beta$, $OC_1C = \gamma$.

Trong ΔAOA_1 vuông tại O, ta có:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{OA_1A} = \cos(90^0 - \widehat{OA_1A}) = \sin\widehat{OAA_1} = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{a}.$$

Tương tự, ta cũng có $\cos\beta = \dfrac{OH}{b}$ và $\cos\gamma = \dfrac{OH}{c}$.

Trong các ΔAOA_1 và ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA_1^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OH^2}{a^2} + \frac{OH^2}{b^2} + \frac{OH^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho tam diện Sxyz có Sx, Sy, Sz đôi một vuông góc. Lấy các điểm A B, C trên Sx, Sy, Sz. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

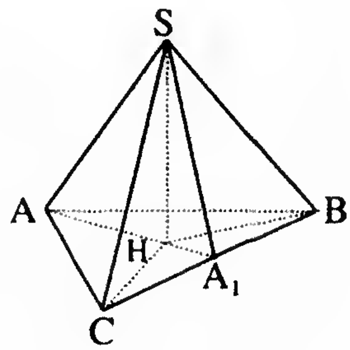
a. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

b. Chứng minh rằng $(S_{SBC})^2 = S_{ABC} . S_{HBC}$. Từ đó suy ra:

$$(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2.$$

Giải

a. Ta có:



$$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC. \quad (1)$$

Mặt khác, vì H là trực tâm của ΔABC nên:

$AH \perp BC.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$ (3)

Chứng minh tương tự, ta được $AB \perp SH.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SH \perp (ABC)$.

b. Trong ΔSAA_1 vuông tại S, ta có:

$$SA_1^2 = AA_1.HA_1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}SA_1^2.BC^2 = \frac{1}{4}AA_1.HA_1.BC^2$$

$\Leftrightarrow (S_{SBC})^2 = S_{ABC} . S_{HBC}$, đpcm.

Chứng minh tương tự, ta có:

$(S_{SAB})^2 = S_{ABC} . S_{HAB}$ và $(S_{SCA})^2 = S_{ABC} . S_{HCA}$.

Khi đó:

$(S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2 = S_{ABC} . S_{HAB} + S_{ABC} . S_{HBC} + S_{ABC} . S_{HCA}$

$= (S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}).S_{ABC} = (S_{ABC})^2$, đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, C_1D_1. Hãy tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a. AB_1 và BC_1, AC_1 và CD_1.

b. MN và C_1D_1, BD và AD_1, MN và AP, A_1P và DN.

Bài tập 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b và AA_1 = c.

a. Hãy tính góc giữa AD_1 và B_1C.

b. Hãy tính góc giữa AB và A_1C.

Bài tập 3: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Hãy tính cosin của góc giữa AC và DO.

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD,

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{3}$.

Bài tập 6: Cho tứ diện ABCD, có AB = CD = a, AC = BD = AD = BC = 2a.

a. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó, tính độ dài của chúng.

b. Hãy tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện .

Bài tập 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{3}$.

Bài tập 8: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

a. Chứng minh rằng $AO \perp CD$.

b. Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Bài tập 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b và AA_1 = c.

a. Hãy tính góc giữa AD_1 và B_1C.

b. Hãy tính góc giữa AB và A_1C.

Bài tập 10: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.

a. Tính độ dài AD.
b. Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD).
c. Tính góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD).

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG.
b. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (P).
c. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = 2a và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC).
b. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài tập 13: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh AB = a nằm trong một mặt phẳng α, cạnh $BC = a\sqrt{3}$, AC tạo với α một góc 60^0. Tính góc giữa BC và α.

Bài tập 14: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').
b. Tính góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABCD).
c. Tính góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (BB'D'D).
d. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (B'CD').

Bài tập 15: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AC' = 2a.

a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').
b. Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.
c. Tính góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABCD).
d. Tính góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (BB'D'D).
e. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (B'CD').

Bài tập 16: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCM) và (ABC).
b. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCM).

Bài tập 17: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông đỉnh B, AB = 2a, $BC = a\sqrt{3}$ SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).
b. Tính khoảng cách từ A tới đường thẳng CM.
c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCM) và (ABC).
d. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCM).

Bài tập 18: Cho hình chóp S.ABCD có $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\hat{A} = 60^0$.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABCD) và độ dài SC.

b. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (ABCD)$ và $SB \perp BC$.

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

Bài tập 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và hình chiếu vuông góc H của A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ trùng với trung điểm của cạnh B_1C_1.

a. Tính khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ.

b. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AC_1.

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AB_1A_1) và (ABC).

Bài tập 20: Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để :

a. $(ABC) \perp (BCD)$.   b. $(ABC) \perp (ACD)$.

Bài tập 21: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài tập 22: Trong mặt phẳng a cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R. Trên đường thẳng vuông góc tại O với α lấy điểm S sao cho OS = R. Gọi M, N là hai điểm trên (C) sao cho $\widehat{MON} = 90^0$, a và b là hai tiếp tuyến với (C) tại M và N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (S, a) và (S, b).

Bài tập 23: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt (SAC) hợp với mặt (SAB) một góc α và hợp với mặt (SBC) một góc β. Dựng các đường cao AH, AK của ΔSAC và ΔSAB.

a. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{AHK} = \beta$.

b. Chứng minh rằng $SA = \dfrac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos[\pi - (\alpha + \beta)].\cos(\alpha - \beta)}}$.

Bài tập 24: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi φ là góc hợp bởi (ABC) với (SBC). Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi.$$

Bài tập 25: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Hai mặt bên SAB và SCD vuông tại A và C, cùng hợp với đáy góc α. Biết $\widehat{ABC} = \varphi$.

a. Chứng minh SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Chứng minh (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc β thoả hệ thức $\cot\text{an}\beta = \cot\text{an}\alpha.\cos\varphi$.

Bài tập 26: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC vuông tại B, AB = a, $\widehat{BAC} = \alpha$, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi β là góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

a. Chứng minh rằng $\text{tg}\alpha.\text{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{1 + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

b. ΔABC phải thoả thêm điều kiện gì để $\beta = 60^0$.

Bài tập 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

Bài tập 28: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính số đo nhị diện (A, SB, C).
b. Tính số đo nhị diện (A, SD, C).
c. Tính số đo nhị diện (B, SC, D).

Bài tập 29: Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính số đo của các nhị diện sau:

a. (S, BC, A).
b. (S, BD, A).
c. (SAB, SCD).

Bài tập 30: Cho chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh 3a, tâm O, $OB = a\sqrt{3}$, $SO = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng ASC vuông
b. Chứng minh (B, SA, D) là nhị diện vuông.
c. Tính số đo của nhị diện (S, BC, A).

Bài tập 31: Từ điểm M ngoài mặt phẳng α ta hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB, MC tới mặt phẳng α. Biết MA = a và MB, MC đều tạo với mặt phẳng α các góc 30^0, MB và MC vuông góc với nhau.

a. Tính độ dài đoạn BC.
b. Tính số đo của nhị diện (M, BC, A).

Bài tập 32: Cho ΔABC cân tại đỉnh A và α là mặt phẳng chứa đường cao AH. Gọi B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B và C lên α. Chứng minh rằng ΔAB_1C_1 cân.

Bài tập 33: Cho ΔABC vuông tại B, AB = 2a, BC = a. Trên hai nửa đường thẳng Bx và Cy vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ở cùng một phía đối với (ABC) lấy các điểm B_1 và C_1 sao cho $BB_1 = a$, $CC_1 = x$. Tính theo a và x độ dài các đoạn AB_1, B_1C_1 và AC_1. Từ đó suy ra giá trị của x sao cho góc $\widehat{AB_1C_1} = 90^0$.

Bài tập 34: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng α trong mỗi trường hợp sau:

a. α qua SB và hợp với (SAB) góc 30^0.
b. α qua AC và hợp với (ABCD) góc 60^0.

Bài tập 35: Cho ΔABC cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}$, đáy BC = 3a; BC chứa trong mặt phẳng α. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên α. Khi tam giác A'BC vuông tại A', tính góc giữa α và (ABC).

Bài tập 36: Cho hình chóp S.ABC có các mặt bên hợp với đáy một góc φ.

a. Chứng minh hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
b. Chứng minh rằng $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\varphi}$.

Bài tập 37: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và AA' = h. Một mặt phẳng α cắt ba cạnh bên của lăng trụ. Tính diện tích của thiết diện của lăng trụ với α trong các trường hợp sau:

a. Góc giữa α và (ABC) bằng 45^0.

b. Góc giữa α và BC' bằng 60^0.

Bài tập 38: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho $x\hat{O}y = x\hat{O}z = \alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ và $y\hat{O}z = \beta$. Gọi γ là góc giữa Ox và mặt phẳng (yOz). Chứng minh rằng $\cos\alpha = \cos\frac{\beta}{2}.\cos\gamma$.

Bài tập 39: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho $x\hat{O}z = y\hat{O}z = \alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$; M là một điểm trên Oz. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) nằm trên đường phân giác của góc $x\hat{O}y$.

Bài tập 40: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng và $x\hat{O}y = \alpha$; $x\hat{O}z = \beta$ $(0 < \alpha, \beta < 90^0)$, $y\hat{O}z = \gamma$. Lấy A trên Ox với OA = 1. Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với Ox cắt Oy, Oz lần lượt tại B và C. Tìm mối liên hệ giữa α, β, γ để để hai mặt phẳng (xOy) và (xOz) vuông góc với nhau.

Bài tập 41: Cho tứ diện OABC có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (OAB) và (OAC) vuông góc với nhau là ΔABC có tanB.tanC = 2.

Bài tập 42: Cho ba tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz đôi một hợp với nhau góc 60^0 A là một điểm cố định trên Oz với OA = a.

a. M, N là hai điểm lần lượt trên Ox, Oy. Giả sử M cố định, N di động trên Oy. Tìm tập hợp hình chiếu của A trên MN.

b. Đặt OM = x, ON = y. Tìm điều kiện cần và đủ để tam giác AMN vuông tại A.

Bài tập 43: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và vuông góc với nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho AC = 2OB và BC = 2OA. Đặt a = OA. Gọi M và N là chân các đường vuông góc kẻ từ O lần lượt đến AC và BC. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1.$$

Bài tập 44: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng, đôi một hợp với nhau góc 60^0. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $B\hat{A}C = 90^0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (yOz). Đặt OA = a, OB = x, OC = y.

a. Tính y theo a và x. Tìm điều kiện của x để y tồn tại.

b. Chứng minh nếu đường thẳng BC qua H thì ta có hệ thức 3xy = a(x+y).

c. Tính x, y theo a, biết H thuộc đường thẳng BC.

Bài tập 45: Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC và đôi một vuông góc với nhau OA = OB = OC = a. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và AC, E là điểm đối xứng của O qua K.

a. Chứng minh ΔBCE và ΔOME là những tam giác vuông và mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (OCK).

b. Gọi I là giao điểm của CE với mặt phẳng (OMN). Chứng minh mặt phẳng (OMN) vuông góc với CE và MN vuông góc với OI. Tính diện tích tứ giác OMIN.

c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OB và CE.

d. F là một điểm di động trên cạnh OA, CH là đường cao của tam giác BCF. Tìm tập hợp điểm H.

Bài tập 46: Hình chóp O.ABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ.

a. Chứng minh hệ thức $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

b. H là trực tâm tam giác ABC. Các cạnh OA, OB, OC hợp với OH các góc α', β', γ'. Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = \sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = 2$$

c. Đẳng thức trên còn đúng nữa không nếu H là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng (ABC).

d. Đặt $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}$ và h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{S}{h^2}$.

Bài tập 47: Cho tứ diện SABC có ba góc ở đỉnh S đều vuông. Đặt a = SA, b = SB, c = SC. Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của ΔABC.

a. Tính SH, SG theo a, b, c.

b. Chứng minh rằng ΔABC có ba góc nhọn và $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$.

c. Chứng minh rằng $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} > \dfrac{9}{2}SH^2$.

d. Giả sử b + c = a. Chứng minh rằng $\widehat{SAB} + \widehat{SAC} + \widehat{BAC} = 90^0$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của S trên AB và CD.

a. Chứng minh mặt phẳng (SIJ) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Biết hai mặt SAB và SAD cùng hợp với đáy góc α, còn SC hợp với đáy góc β. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

Bài tập 2: Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60^0, nhận BA = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax.

a. Tính AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b. Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b. Tính số đo nhị diện (A, SD, C).

c. Gọi BE, DF là hai đường cao của tam giác SBD. Chứng minh rằng m phẳng (ACF) vuông góc với mặt phẳng (SBC); mặt phẳng (AEF) vuông g với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt b (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.

a. Chứng minh rằng SI vuông góc với mặt phẳng (ABCD); AD vuông góc v mặt phẳng (SAB).

b. Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAD).

c. Tính góc giữa SD và mặt phẳng (SCI).

Bài tập 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là m phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC); S là một điểm di động trên (I sao cho S.ABCD là hình chóp có hai mặt bên (SAB), (SAC) hợp với đáy (ABC) h góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông g của S trên BC, AB, AC.

a. Chứng minh rằng $SH^2 = HI.HJ$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = SB = S khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là h. Tính theo a để hai mặt phẳng (SAB) (SAC) vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuô góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N là hai điểm lần lượt ở trên hai cạnh BC, D sao cho $BM = \frac{a}{2}; DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuô góc với nhau.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuô góc với mặt phẳng (ABCD); M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh B CD. Đặt BM = x, DN = y.

a. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SM vuông góc với nhau là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Từ đó suy hệ thức liên hệ giữa x, y.

b. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, SA, N) có số đo bằ 30^0 là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD có khoảng cách từ A đến BD bằng h. Tr hai tia Ax, Cy cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD0 và cùng chiều, ta lần lư lấy hai điểm M, N. Đặt x = AM, y = CN. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ hai mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc là $xy = h^2$.

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC. Gọi O là tâm của đường tr ngoại tiếp tam giác ABC; I là trung điểm của AB, K là giao điểm của OI với BC.

a. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SB vuông góc với nhau là $\widehat{ISK} = 90^0$.

b. Biết bán kính của đường tròn (ABC) là R, SO = 2R, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$. Chứ minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông g với nhau là tam giác ABC có ba góc nhọn và $tg\alpha.tg\beta = \frac{5}{4}$.

ài tập 11: Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên đường thẳng (Δ) vuông góc với ặt phẳng chứa tam giác tại A ta lấy một điểm S. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu uông góc của A trên SB, SC.

a. Chứng minh các mặt của tứ diện S.ABC đều là tam giác vuông.

b. Tìm tập hợp các điểm D và E khi S di động trên (Δ).

c. Chứng minh rằng AE vuông góc với mặt phẳng (SBC); DE vuông góc với SB và AE.

d. Chứng minh đường thẳng DE qua một điểm cố định khi S di động trên (Δ).

ài tập 12: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C). Vẽ SA = 2R và SA vuông góc ới α. Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, và SAM.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAM) vuông góc với mặt phẳng (SBM).

b. Chứng minh tứ giác BHMK nội tiếp được và giao điểm T của HK và BM ở trên một đường thẳng cố định.

c. Đặt góc $\widehat{BAM} = \varphi$, với $0 < \varphi < 90^0$. Tìm giá trị của φ để diện tích tam giác AHK lớn nhất.

ài tập 13: Cho hình vuông ABCD nằm trong mặt phẳng α. Vẽ tia Ax vuông góc với α, là một điểm trên Ax. Đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (MBC) cắt α i R, đường thẳng qua M và vuông góc với (MCD) cắt α tại S.

a. Chứng minh: A, B, R thẳng hàng và A, D, S thẳng hàng.

b. Tìm tập hợp trung điểm I của RS khi M di động trên tia Ax

c. Gọi AH là đường cao của tam giác AMI. Chứng minh AH vuông góc với mặt phẳng (MRS) và H là trực tâm của tam giác MRS .

ài tập 14: Cho tam giác BCD vuông tại B có CD = a, BCD = α; BA vuông góc với ặt phẳng (BCD) và BA = a.

a. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) theo a và α.

b. Gọi I là trung điểm của CD. Xác định α để mặt phẳng (ABI) là mặt phẳng trung trực của CD.

c. Giả sử C, D cố định, B di động trên đường tròn đường kính CD. Chứng minh rằng $AC^2 + AD^2$ không đổi.

ài tập 15: Cho tam giác đều ABC có chiều cao AH = 3a. Lấy điểm O trên đoạn H sao cho AO = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O lấy ểm S sao cho OS = BC.

a. Chứng minh BC vuông góc với SA và tính SO, SA, SH theo a.

b. Tính số đo nhị diện (B, SA, C)

c. Qua điểm I trên đoạn OH, dựng mặt phẳng α vuông góc với OH, α cắt các đoạn AB, SB, SC lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang cân.

d. Tính diện tích MNPQ theo a và x = AI. Xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Bài tập 16: Cho trong mặt phẳng (P) đường tròn (C) đường kính AB = 2R. Trên tia A vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho $\widehat{SBA} = 30^0$; m là điểm trên (C). Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$.

a. Tính tổng các bình phương các cạnh của tứ diện S.ABM theo R và α.

b. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và AM theo R và α.

c. Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với SB tại H, cắt SM tại N. Tìm tập hợp cá điểm N khi M di động trên (C).

d. Gọi β là số đo góc phẳng nhị diện cạnh SB. Chứng minh rằng $\tan\alpha \cdot \tan\beta = 2$.

Bài tập 17: Cho tứ diện S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = 2a, AC = 3. SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = $a\sqrt{3}$.

a. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC, đặt x = MC. Gọi H và K lần lư là các hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (ABC) và (ASB). M phẳng (MHK) cắt AB tại L. Chứng minh rằng KMHL là hình chữ nhật. V giá trị nào của x thì KMHL là hình vuông ?

b. Tính theo a và x độ dài đường chéo ML của hình chữ nhật KMHL. Với g trị nào của x thì ML có độ dài nhỏ nhất ? Ứng với giá trị nào của x hãy nê lên đặc tính hình học của đoạn ML.

Bài tập 18: Cho hình thang vuông ABCD có đáy lớn AD = 2a, đáy nhỏ BC = a, AB =a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M là là một điể trên đường chéo AC, đặt AM = x. Mặt phẳng α qua M và vuông góc với AC. Tu theo vị trí của M trên đoạn AC hãy xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD v α. Tính diện tích của thiết diện này theo a và x. Xác định x để thiết diện có diệ tích lớn nhất.

Bài tập 19: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R; AB là m dây cung di động của (C); I là trung điểm của AB. Trên đường thẳng vuông góc v α tại O lấy điểm S.

a. Chứng minh mặt phẳng (SOI) vuông góc với mặt phẳng (SAB).

b. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SAB) khi AB động nhưng luôn luôn cùng phương với một đường thẳng cố định.

c. Đặt AB = 2x ($0 \le R$), SO = h. Tính x để diện tích tam giác lớn nhất.

Bài tập 20: Cho hình chóp S.ABC là tam giác vuông tại A với AB = a và BC = 2a. Điể H ở trên cạnh AC sao cho CH = $\frac{1}{3}$CA, SH là đường cao của hình chóp và SH $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và SA. Tìm thiết diện và tính diện tíc thiết diện của hình chóp đã cho với các mặt phẳng:

a. Qua H và vuông góc với AI.

b. Qua BJ và vuông góc với mặt phẳng (SHI).

c. Qua I và vuông góc với BC.

Bài tập 21: Tứ diện ABCD có DA = $a\sqrt{2}$, các cạnh khác đều bằng a; DH vuô góc với mặt phẳng (ABC) tại H.

a. Chứng minh rằng ABH và ACH là những tam giác vuông bằng nhau và ca mặt phẳng (DBC) và (ADH) vuông góc với nhau

b. Tính số đo nhị diện cạnh AD.

c. Mặt phẳng qua H và vuông góc với AD cắt AD, BD và CD lần lượt tại A', B', C'. Tính AH, DH, DB' và chứng minh rằng tứ giác HB'A'C' là hình vuông.

ài tập 22: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$,

C = 2a. Các đỉnh S, A, C cố định; đỉnh B di động sao cho nhị diện cạnh SB luôn là nhị ện vuông; AD và AE lần lượt là đường cao của tam giác SAC và SAB.

a. Chứng minh tam giác ABC và SBC vuông và AE vuông góc với mặt phẳng (SBC).
b. Tính góc $\widehat{BAC}$ để khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAC) lớn nhất.
c. Giả sử DE cắt BC tại M và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SBC) tại D cắt mặt phẳng (ABC) tại N. Chứng tỏ A, M, N thẳng hàng và tích AM, AN không đổi. Định góc BAC để MN có độ dài nhỏ nhất.

ài tập 23: Cho mặt phẳng α, một điểm A ở trong mặt phẳng α và một điểm B ở oài mặt phẳng α sao cho các khoảng cách từ A và B đến Δ bằng nhau. Gọi M và là hình chiếu vuông góc của A và B trên Δ.

a. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên α. Chứng minh rằng trong α đường trung trực của MN qua một điểm F cố định.
b. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các điểm I khi Δ di động.
c. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (B, Δ). Chứng minh rằng AQ có độ dài không đổi.

ài tập 24: Hình chóp S.ABCD có đáy hìn vuông cạnh a. Các nhị diện cạnh AB, C, CD, AD, có số đo lần lượt là α, β, γ, β. Gọi h là hình chiếu vuông góc của S n mặt phẳng (ABCD).

a. Tính SH theo a và β.
b. Cho $\gamma = 4\alpha$. Tính tỉ số $\frac{a}{SH}$ theo α.
c. Tính α, β, γ cho biết $\gamma = 2\beta = 4\alpha$.

ài tập 25: Trong mặt phẳng α cho đoạn thẳng AB = 2a và một đường thẳng y'By ông góc với AB tại B. Trên đường thẳng x'Ax vuông góc với α tại A, ta lấy đoạn C = x và trên y'By ta lấy BD = y.

a. Các mặt nào của tứ diện ABCD là tam giác vuông?
b. Tính CD. Tìm hệ thức giữa x và y để CD = x + y.
c. Giả sử hệ thức đó được thỏa, tính tổng các bình phương các diện tích các mặt của tứ diện ABCD theo a và x + y. Suy ra giá trị của x và y để tổng đó nhỏ nhất.

ài tập 26: Trong mặt phẳng α cho hình thoi ABCD cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Từ c điểm B, C, D ta vẽ ba tia By, Cz, Dt cùng vuông góc với α và cùng chiều. Trên , Dt lần lượt lấy các điểm B', D' với BB' = DD' = x. Mặt phẳng (AB'D') cắt Cz Chứng minh.

a. Chứng minh mặt phẳng (AB'D') chứa một đường thẳng cố định khi x thay đổi.
b. Tứ giác AB'C'D' là hình gì ? Tính theo a và x độ dài CC' và diện tích tứ giác AB'C'D'.
c. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng α và (AB'C'D'). Tính tan φ và cos φ theo a và x.
d. Tính x để AB'C'D' là hình vuông.

MỤC LỤC

SÁCH PHÁT HÀNH TẠI

TP. HỒ CHÍ MINH:
NS HỒNG ÂN - 18D Nguyễn Thị Minh Khai – Quận I

ĐÀ NẴNG:
CÔNG TY CP SÁCH - TBTH – 78 Bạch Đằng

THANH HÓA:
NS VĂN HÓA – 27 – 29 Đại lộ Lê Lợi

NGHỆ AN:
NS VĂN HÓA – 343 Lê Duẩn – TP. Vinh

QUẢNG BÌNH:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 03 Mẹ Suốt và 257 Trần Hưng Đạo

QUẢNG TRỊ:
CỬA HÀNG SÁCH GIÁO DỤC – 283 Trần Hưng Đạo

HUẾ:
NS HỒNG ĐỨC – 59 Trần Phú

QUẢNG NAM:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 190 Phan Chu Trinh
NS SIÊU THỊ VĂN HÓA ĐIỆN ẢNH TAM KỲ – 24 Trần Cao Vân

QUẢNG NGÃI:
NS VĂN HÓA – 204 Nguyễn Nghiêm
NS TRẦN QUỐC TUẤN – 526 Quang Trung

BÌNH ĐỊNH:
NS VĂN HÓA – 120 Lê Lợi – Quy Nhơn

PHÚ YÊN:
NS VĂN HÓA – Ô phố B8 khu dân dụng DUY TÂN – Tuy Hòa

KHÁNH HÒA:
CÔNG TY CP PHS – 34 – 36 Thống Nhất – Nha Trang
SIÊU THỊ TÂN TIẾN – 11 Lê Thành Phương

BÌNH THUẬN:
NS HƯNG ĐẠO – 328 Trần Hưng Đạo – TP. Phan Thiết

ĐỒNG NAI:
NS KIM NGÂN – 88 Cách Mạng Tháng Tám – TP. Biên Hòa

VŨNG TÀU:
NS ĐÔNG HẢI – 38 Lý Thường Kiệt
NS ABC – 204 Bình Giã

GIA LAI:
NS NHÂN DÂN – 06 Lê Lợi – Pleiku
CÔNG TY SÁCH TBTH – 40B Hùng Vương

DAKLAK:
NS GIÁO DỤC – 19 Trường Chinh
NS LÝ THƯỜNG KIỆT – 55 – 57 Lý Thường Kiệt
CÔNG TY CP VĂN HÓA DAKLAK – 01 Hai Bà Trưng

KONTUM:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH - 129 Phan Đình Phùng

LÂM ĐỒNG:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
CÔNG TY CP IN VÀ PHS – 18 Khu Hòa Bình – Đà Lạt

DAK NÔNG:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 151 Hai Bà Trưng
NS GIÁO DỤC – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa

ĐỒNG NAI:

NS KIM NGÂN – 88 Cách mạng tháng Tám – Biên Hòa

TÂY NINH:

NS VĂN NGHỆ – 295 Đường 30 tháng 4

LONG AN:

CÔNG TY PHS – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An

TIỀN GIANG:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho

VĨNH LONG:

HS MƯỜI – 15 Lê Thái Tổ

CẦN THƠ:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 132 Đường 30 tháng 4

HẬU GIANG:

CÔNG TY SÁCH TBTH – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh

ĐỒNG THÁP:

NS VIỆT HƯNG – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh

BẾN TRE:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 03 Đồng Khởi

SÓC TRĂNG:

NS TRẺ – 41 Trần Hưng Đạo

AN GIANG:

TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng

BẠC LIÊU:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3
TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ

KIÊN GIANG:

NS ĐÔNG HỒ I – 98B Trần Phú – Rạch Giá
NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá

CÀ MAU:

CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2

TRÀ VINH:

NS LIÊN SƯƠNG – 127 Trần Quốc Tuấn

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896
Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04)39714897;
Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN VĂN TRỌNG

Sửa bài: THÁI VĂN

Trình bày bìa: THÁI HỌC

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

ỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN HÌNH HỌC 11
ã số: 1L - 37ĐH2011
1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao bì Phong Tân. Tp. HCM
ố xuất bản: 162 - 2011/CXB/5 - 16/ĐHQGHN, ngày 17/02/2011.
uyết định xuất bản số: 34LK - TN/QĐ - NXBĐHQGHN. Ngày 21/02/2011
xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.